

סטודנטים יקרים

לפניכם ספר תרגילים בקורס מתמטיקה בדידה. הספר הוא חלק מקורס חדשני וראשון מסוגו בארץ בנושא זה, המועבר ברשת האינטרנט On-line.

הקורס באתר כולל פתרונות מלאים לספר התרגילים, וכן את התיאוריה הרלוונטית לכל נושא ונושא.

הקורס כולו מוגש בסרטוני וידאו המלווים בהסבר קולי, כך שאתם רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי שנעשה בשיעור פרטי, לדוגמה [לחצו כאן](#).

את הקורס בנה מר טל פלדמן, מרצה מבוקש במוסדות אקדמיים שונים ובעל ניסיון עתיר בהוראת המקצוע.

אז אם אתם עסוקים מידי בעבודה, סובלים מלקויות למידה, רוצים להצטיין או פשוט אוהבים ללמוד בשקט בבית, אנחנו מזמינים אתכם לחוויית לימודים יוצאת דופן וחדשה לחלוטין, היכנסו עכשיו לאתר www.gool.co.il.



אנו מאחלים לכם הצלחה מלאה בבחינות

צוות האתר GooL

גול זה בול. בשבילך!

לפתרון מלא בסרטון וידאו היכנסו ל- www.GooL.co.il

כתב ופתר - טל פלדמן ©

שיעורים פרטיים לבודדים ולקבוצות 054-7599493

תוכן

3	תרגילים בנושא תרגילים בנושא האלגוריתם של אוקלידס
4	תרגילים בנושא לוגיקה
13	תרגילים בנושא קבוצות
17	תרגילים בנושא פונקציות
21	תרגילים בנושא עוצמות
23	תרגילים ביחסים
28	תרגילים בקומבינטוריקה בסיסית
32	תרגילים בנושא זהויות קומבינטוריות והבינום של ניוטון
34	תרגילים בנושא הכלה והדחה
37	תרגילים בנושא רקורסיה
40	תרגילים בנושא שובך היונים
41	תרגילים בנושא גרפים

תרגילים בנושא האלגוריתם של אוקלידס

(1) חשב $\gcd(a, b)$ בעזרת האלגוריתם של אוקלידס ורשום את סידרת אוקלידס המתקבלת עבור:

א. $a = 78$ $b = 45$ ב. $a = 57$ $b = 36$ ג. $a = 132$ $b = 44$ ד. $a = 187$ $b = 121$

(2) רשום את סדרת אוקלידס ורשום את $\gcd(a, b)$ ללא ביצוע רישום מפורש של האלגוריתם עבור:

א. $a = 90$ $b = 56$ ב. $a = 1458$ $b = 1536$ ג. $a = 741$ $b = 132$

(3) יהיו $a, b, c \in \mathbb{Z}$

א. הוכח כי אם $a|b$ וגם $a|c$ אז $a|b+c$

ב. הוכח כי אם $a|b$ וגם $a|b+c$ אז $a|c$

ג. הסק מהסעיפים הקודמים כי כל שני מספרים טבעיים עוקבים הם זרים.

(4) הוכח כי לכל $n \in \mathbb{Z}$ המספרים a, b הם זרים.

א. $a = 9n + 5, b = 2n + 1$ ב. $a = 10n + 11, b = 6n + 7$

(5) הוכח כי לכל $n \in \mathbb{Z}$ מספרים $a = 3n + 7, b = n + 3$ הם זרים אם ורק אם n הוא זוגי.

(6) מצא מספר טבעי $n < 50$ כך שהמספרים $a = 3n + 1, b = 5n - 2$ אינם זרים.

(7) א. מצא שלושה מספרים טבעיים $n < 170$ כך שהמספרים $a = 7n + 8, b = 5n + 3$ אינם זרים.

ב. רשום במפורש את אברי הקבוצה הבאה: $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid \gcd(7n + 8, 5n + 3) \neq 1\}$

(8) א. מצא לאלו ערכי $x \in \mathbb{Z}$ מתקיים $\gcd(3x, 2) = 1$.

ב. לאלו ערכי $x, y \in \mathbb{Z}$ מתקיים $\gcd(2x + y, 3) = 1$.

ג. עבור $n \in \mathbb{Z}, 7 \leq n$ מצא $x, y \in \mathbb{Z}$ כך ש- $\gcd(2x + 3y, n - 1) \neq 1$.

ד. עבור $n \in \mathbb{Z}, 7 \leq n$ מצא $x, y \in \mathbb{Z}$ כך ש- $\gcd(2x + 3y, n) = 1$.

תרגילים בנושא לוגיקה

(1) רשום את טבלות האמת של הפסוקים הבאים:

א. $(p \wedge q) \vee \neg r$

ב. $\neg(p \wedge q) \rightarrow (\neg r)$

ג. $(p \wedge \neg q) \vee r$

ד. $(p \vee q) \rightarrow (q \rightarrow r)$

(2) בטא את שלילת הפסוקים הבאים. (בלי קשר לנכונותם)

א. דוד יפה או ראובן מכוער

ב. האוכל חם וטעים

ג. לכל x קיים y שהוא השורש הריבועי של x

ד. כל תרנגולת כחולה עוזבת את הלול כדי להטיל ביצים.

ה. כל פנתר שהוא ורוד משחק בסרטים מצוירים.

ו. כל פנתר שהוא ורוד קוראים לו יוסי או שהוא משחק בסרטים מצוירים.

ז. כל פנתר שהוא ורוד קוראים לו יוסי וגם הוא משחק בסרטים מצוירים.

ח. לכל נגר קיים אדם שכל רהיטיו יוצרו בידי נגר זה.

ט. אם יהיה יום יפה וגם יהיה לי מצב רוח טוב אז אצא לטיול.

י. אם יהיה יום יפה אז אם יהיה לי מצב רוח טוב אז אצא לטיול.

(3) בדוק אלו מזוגות הפסוקים הבאים שקולים לוגית במקרה שהתשובה חיובית הראה זאת. הן בעזרת טבלת

אמת והן בעזרת עץ שקר

א. $\neg(p \rightarrow q)$ $p \wedge (\neg q)$

ב. $(\neg p) \rightarrow q$ $p \vee (\neg q)$

ג. $p \rightarrow (\neg q)$ $\neg(p \wedge q)$

ד. $(p \vee q) \wedge (\neg q)$ $p \wedge (\neg q)$

ה. $p \leftrightarrow q$ $(p \wedge q) \vee ((\neg p) \wedge (\neg q))$

ו. $(s \rightarrow (p \wedge (\neg r))) \wedge ((p \rightarrow (r \vee q)) \wedge s)$ $p \vee u$

ז. הראה כי $\neg(r \wedge (p \vee q)) \equiv ((\neg p) \wedge (\neg q)) \vee \neg r$ בעזרת זהויות יסוד.

לפתרון מלא בסרטון וידאו היכנסו ל- www.GooL.co.il

כתב ופתר - טל פלדמן ©

שיעורים פרטיים לבוחדים ולקבוצות 054-7599493

4 א. הבע את קשר הגרירה בעזרת קבוצת הקשרים $\{\wedge, \neg\}$

ב. הבע את קשר ה- \vee בעזרת קבוצת הקשרים $\{\wedge, \neg\}$

ג. הבע את קשר ה- \oplus (XOR) בעזרת קבוצת הקשרים $\{\wedge, \neg\}$

ד. הבע את קשר ה- \leftrightarrow בעזרת קבוצת הקשרים $\{\wedge, \neg\}$

ה. הבע את קשר הגרירה בעזרת קבוצת הקשרים $\{\vee, \neg\}$

ו. הבע את הקשר \wedge בעזרת קבוצת הקשרים $\{\vee, \neg\}$

ז. הבע את קשר ה- \oplus (XOR) בעזרת קבוצת הקשרים $\{\vee, \neg\}$

ח. הבע את קשר ה- \leftrightarrow בעזרת קבוצת הקשרים $\{\vee, \neg\}$

$$\alpha_1: (A \vee B) \rightarrow (D \rightarrow C)$$

$$\alpha_2: B \rightarrow \neg(C \wedge A)$$

$$\alpha_3: C \leftrightarrow (A \wedge D)$$

$$\beta: D \vee (B \wedge C)$$

בדקו אלו מהטענות הבאות נכונות והוכיחו.

5 יהיו $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$ הפסוקים הבאים:

$$\text{א. } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \Rightarrow \beta$$

ב. β אינה נובעת טאוטולוגית מהפסוקים $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ אך מתיישבת אתם.

ג. β אינה מתיישבת עם הפסוקים $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ כלומר סותרת אתם.

6 הוכח כי הפסוקים הבאים הינם טאוטולוגיות ללא שימוש בטבלת אמת

$$\text{א. } p \vee (\neg p)$$

$$\text{ב. } p \vee (p \rightarrow q)$$

$$\text{ג. } (p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow r)$$

$$\text{ד. } (p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$$

$$\text{ה. } ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$$

$$\text{ו. } ((p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow r)$$

$$\text{ז. } (q \vee p \vee r) \rightarrow ((\neg p) \rightarrow ((q \vee r) \wedge (\neg p)))$$

$$\text{ח. } ((B \rightarrow (C \wedge (\neg A))) \wedge (((\neg B) \vee C) \rightarrow D) \wedge (E \rightarrow (\neg D))) \rightarrow (A \rightarrow \neg E)$$

ט. הוכח בעזרת טבלת אמת שהפסוק $(u \rightarrow v) \leftrightarrow ((\neg v) \rightarrow (\neg u))$ הוא טאוטולוגיה.

י. הוכח כי הפסוק $(u \rightarrow v) \leftrightarrow ((\neg v) \rightarrow (\neg u)) \rightarrow (((p \rightarrow r) \wedge ((\neg q) \rightarrow p) \wedge (\neg r)) \rightarrow q)$ הוא טאוטולוגיה. (מותר לך להסתמך על הסעיף הקודם)

7) בארץ חלם מתקיימת שביתת רופאים במטרה להגדיל את תקציב הבריאות. לפניך ניתוח המצב.

* אם הרופאים לא יסיימו את השביתה אז הנהלות בתי החולים יתערבו.

* אם לא תיפגע בריאותם של החולים אז הממשלה לא תגדיל את הקציב.

* אם הנהלות בתי החולים יתערבו אז לא תפגע בריאותם של החולים או שבית המשפט יתערב.

* בית המשפט לא יתערב וגם הממשלה לא תגדיל את התקציב.

מסקנה: הרופאים יסיימו את השביתה.

נסמן: D הרופאים יסיימו את השביתה H הנהלות בתי החולים יתערבו. P בית המשפט יתערב

C לא תפגע בריאותם של החולים M הממשלה תגדיל את התקציב.

א. הצרן בעזרת המשתנים המוצעים את טיעון לשפת תחשיב הפסוקים.

ב. בדוק ללא שימוש בטבלת אמת אם הטיעון תקף.

8) בארץ חלם מתקיימות בחירות זרובבל, כתבינו לענייני מפלגות מנתח את המצב:

* אם אבי ייבחר לראשות מפלגת נתיב את דני יפרוש.

* אם שמעון יציע לדני תפקיד אז דני יפרוש.

* אם בני ייבחר לראשות מפלגת פיתה אז שמעון יציע לדני תפקיד או שאבי ייבחר לראשות מפלגת נתיב.

* בני יבחר לראשות מפלגת פיתה.

לכן מסיק כתבינו שדני יפרוש.

סמן: A אבי ייבחר לראשות מפלגת נתיב. B בני יבחר לראשות מפלגת פיתה. C שמעון יציע לדני

תפקיד. D דני יפרוש.

הצרן את הטענה לשפת תחשיב הפסוקים והוכח כי המסקנה תקפה.

(9) בפרס העתיקה מחליט היזם וייתא לבנות תיאטרון. אם רוצים שהתיאטרון נגיש לתושבים אז צריך להקימו בלב העיר. אם רוצים שהתיאטרון יהיה רווחי הוא צריך להיות גדול ומרווח כדי שיכיל הרבה אנשים. אבל אם התיאטרון יהיה גדול ומרווח ויבנה בלב העיר אז הוא יעלה 10 מליון זוזים פרסיים. אבל לוייתא היזם אין 10 מליון זוזים פרסיים לכן מסיק וייתא היזם כי התיאטרון יוקם במקום לא נגיש לתושבים או שלא יהיה גדול ומרווח.

א. תרגם את ניתוח המצב לשפת הפסוקים תוך שימוש בסימונים הבאים:

N נגיש לתושבים L בלב העיר Y יכיל הרבה אנשים G גדול ומרווח M מחירו יעלה על... R ריווחי

הצרן את ההנחות והמסקנה לשפת הפסוקים בדוק האם המסקנה תקפה ללא שימוש בטבלת אמת.

(10) הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות. (כאשר p, q, r פסוקים אטומים)

$$א. (p \vee q) \Rightarrow p$$

$$ב. (p \vee q) \Rightarrow q$$

$$ג. (p \rightarrow q) \Rightarrow q$$

$$ד. p, p \rightarrow q \Rightarrow q$$

$$ה. (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge p \Rightarrow r$$

$$ו. r \Rightarrow (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge p$$

$$ז. A \rightarrow B, C \rightarrow B, D \rightarrow (A \vee C), D \Rightarrow B$$

$$ח. (A \vee B \rightarrow D), D \rightarrow (C \vee P), P \rightarrow Q, (\neg C) \wedge (\neg Q) \Rightarrow \neg A$$

$$ט. (B \rightarrow (C \wedge (\sim A))), ((\sim B) \vee C) \rightarrow D, (E \rightarrow (\sim D)) \models (A \rightarrow \sim E)$$

(11) בסעיפים הבאים α, β, γ פסוקים לאו דווקא אטומים. הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות.

$$א. אם α סתירה וגם $\alpha \Rightarrow \beta \vee \gamma$ אז $\beta \Rightarrow \neg \gamma$$$

$$ב. אם α טאוטולוגיה וגם $\alpha \Rightarrow \beta \vee \gamma$ אז $\neg \beta \Rightarrow \gamma$$$

$$ג. אם $\alpha \Rightarrow \beta \vee \gamma$ אז $((\alpha \Rightarrow \beta) \vee (\alpha \Rightarrow \gamma))$$$

$$ד. אם $((\alpha \Rightarrow \beta) \vee (\alpha \Rightarrow \gamma))$ אז $\alpha \Rightarrow \beta \vee \gamma$$$

$$ה. אם $\alpha \Rightarrow \beta \wedge \gamma$ אז $((\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\alpha \Rightarrow \gamma))$$$

1. אם $\alpha \Rightarrow \beta \wedge \gamma$ אז $((\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\alpha \Rightarrow \gamma))$

2. אם $(\alpha \rightarrow \beta) \Rightarrow \gamma$ אז $\alpha \Rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$

3. אם $\alpha \Rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$ אז $(\alpha \rightarrow \beta) \Rightarrow \gamma$

4. אם $\alpha \vee \beta \Rightarrow \gamma$ אז $(\alpha \Rightarrow \gamma) \vee (\beta \Rightarrow \gamma)$

5. אם $(\alpha \Rightarrow \gamma) \vee (\beta \Rightarrow \gamma)$ אז $\alpha \vee \beta \Rightarrow \gamma$

6. אם $\alpha \models \beta \rightarrow \gamma$ אז $\alpha, \beta \models \gamma$

7. אם $\alpha \models \beta \rightarrow \gamma$ אז $\alpha \vee \beta \models \gamma$

(12) עבור α פסוק אטומי או מורכב נגדיר את הקבוצה $F_\alpha = \{\gamma \mid \alpha \Rightarrow \gamma\}$ כלומר F_α היא קבוצת כל הפסוקים

שנובעים טאוטולוגית מהפסוק α . הוכח כי $\alpha \equiv \beta$ אם ורק אם $F_\alpha = F_\beta$.

(13) לכל אחת מהטענות הבאות קבע האם היא נכונה ורשום את שלילתה ללא שימוש בקשר השלילה. במקרה

שהטענה נכונה נמק זאת ובמקרה שהטענה אינה נכונה הבא דוגמה נגדית.

א. $\forall x \in \mathbb{Q} (\exists y \in \mathbb{Q} (x < y))$

ב. $\forall x \in \mathbb{Q} (\exists y \in \mathbb{Q} (x > y))$

ג. $\forall x, y \in \mathbb{Q} (x > y) \rightarrow \exists z \in \mathbb{Q} (x > y + z)$

ד. $\forall x \in \mathbb{Q} (x > 0) \rightarrow (\exists n \in \mathbb{N} (x > \frac{1}{n}))$

ה. $\forall x \in \mathbb{Q} (x \neq 0 \rightarrow \forall y \in \mathbb{Q} \exists z \in \mathbb{Q} (xz = y))$

ו. $\forall x \in \mathbb{Q} (x \geq 1 \rightarrow \forall y \in \mathbb{Q} \exists z \in \mathbb{Q} (xz = y))$

ז. $\forall x \in \mathbb{Q} (x > 0 \rightarrow \exists y \in \mathbb{Q} (xy > 1))$

ח. $\forall x \in \mathbb{Q} \forall y \in \mathbb{Q} (xy = x \wedge x + y < 5) \rightarrow y < 4\frac{1}{2}$

ט. $\forall x \in \mathbb{Q} ((x > 0) \rightarrow \forall y \in \mathbb{Q} (\exists n \in \mathbb{N} (nx > y)))$

14) הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות. במקרה של הפרכה הדגם עולם דיון מתאים עבורו הטענה לא מתקיימת והסבר מדוע הטענה לא מתקיימת. כמו כן רשום גם את שלילה של כל טענה כאשר הקשר \neg

מופיע רק לצד פרדיקטים

א. $\forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x)$

ב. $\exists x P(x) \rightarrow \forall x P(x)$

ג. $(\forall x (P(x) \wedge Q(x))) \rightarrow (\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x))$

ד. $(\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)) \rightarrow (\forall x (P(x) \wedge Q(x)))$

ה. $(\forall x (P(x) \vee Q(x))) \rightarrow (\forall x P(x) \vee \forall x Q(x))$

ו. $(\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)) \rightarrow (\forall x (P(x) \vee Q(x)))$

ז. $(\exists x (P(x) \wedge Q(x))) \rightarrow (\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x))$

ח. $(\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)) \rightarrow (\exists x (P(x) \wedge Q(x)))$

ט. $(\exists x (P(x) \vee Q(x))) \rightarrow (\exists x P(x) \vee \exists x Q(x))$

י. $(\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)) \rightarrow (\exists x (P(x) \vee Q(x)))$

בעולם הדיון \square . הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות.

$$P(x): x^2 - 8x + 15 = 0$$

$$Q(x): x \text{ is odd}$$

$$R(x): x > 0$$

$$L(x): x^2 + 2x + 2 = 0$$

15) נסמן

א. $\forall x [P(x) \rightarrow Q(x)]$

ב. $\forall x [Q(x) \rightarrow P(x)]$

ג. $\exists x [P(x) \rightarrow Q(x)]$

ד. $\exists x [Q(x) \rightarrow P(x)]$

ה. $\forall x [L(x) \rightarrow Q(x)]$

ו. $\exists x [L(x) \rightarrow Q(x)]$

ז. $\exists x [R(x) \rightarrow P(x)]$

$$\text{ז. } \forall x(\neg Q(x) \rightarrow \neg P(x))$$

$$\text{ט. } \forall x[(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow R(x)]$$

$$\text{י. } \exists x[P(x) \rightarrow (Q(x) \wedge R(x))]$$

$$\text{יא. } \forall x[P(x) \rightarrow (Q(x) \wedge R(x))]$$

נפנה עתה למספר שאלות בהצרנות. בכל השאלות מותר להשתמש ב- סימני משתנים: x, y, z סימני קבוצה: $A, B, C, \dots, \square, \square, \square, \square$ סוגריים, קשרים, כמתים ופרדיקטים: $=, \neq, \forall, \exists, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, (, >, <, >, <$ וכן סימנים נוספים הנתונים בגף השאלה.

שימו לב: אסור להשתמש בקשר השלילה ואין להשתמש בסימן \notin !!!

(16) הצרן כל אחת מהטענות הבאות.

- א. לכל מספר ממשי אין עוקב מידי. הכוונה שאין מספר ראשון מייד אחריו.
- ב. אין קבוצה שמכילה את כל הקבוצות. מותר כאן להשתמש בסימן \notin .
- ג. לכל מספר שאינו ראשוני יש לפחות שני מחלקים שונים. כאן גם מותר להשתמש בסימן קבוצה P עבור קבוצת המספרים הראשוניים ובסימן \notin .
- ד. למספר הטבעי הכי גדול אין מחלקים. (ברור שאין כזה אבל צריך רק להצדיק.)
- ה. לא כל מספר טבעי הוא ראשוני.
- ו. כל קבוצה אינה שקולה לקבוצת החזקה שלה.
- ז. לכל שני מספרים טבעיים שונים יש מחלק משותף.
- ח. בכל קבוצה בת לפחות שלושה איברים שונים אין איבר מקסימלי.
- ט. לא בכל תת קבוצה של ממשים יש איבר מינימלי
- י. תהי פונקציה $f: X \rightarrow Y$. נגדיר את הפונקציה $G: P(X) \rightarrow P(Y)$ באופן הבא:

$$G(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

הצרין את הטענה: אם f על אז G ת.ח.ע.

השתמשי רק בסימנים הבאים:

סימני משתנים: x, y, B, C סימני קבוצות: X, Y סימן פונקציה: f

סוגריים, קשרים, כמתים ופרדיקטים: $=, \neq, \forall, \exists, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, (, \subseteq, >, <$

שימו לב: אסור להשתמש בסימנים P ו G . יש להשתמש בהגדרותיהם כדי להחליפם

בסימנים אחרים.

לפתרון מלא בסרטון וידאו היכנסו ל- www.GooL.co.il

כתב ופתר - טל פלדמן ©

שיעורים פרטיים לבוחדים ולקבוצות 054-7599493

יא. לכל מספר ממשי יש לכל היותר שני מספרים ממשיים שונים זה מזה שריבועם שווה לו.

יב. הצרינו את הטענה: לכל פונקציה $f: A \rightarrow B$ לכל פונקציה $g: B \rightarrow A$ אם $g \circ f = Id_A$ אז f היא על.

מותר להשתמש בסימנים הבאים ורק בהם. סימני משתנים x_1, x_2, \dots קשרים $\rightarrow, \leftrightarrow, \wedge, \vee$

והסימנים $\exists, \forall, (,), \in, A^B, B^A, f, g$ ולמען הסר ספק אסור להשתמש ב- d_A ואסור ב-

יג. מספר ראשוני הוא מספר טבעי גדול מאחד שמחלקיו היחידים הם הוא עצמו ו-1. הצרינו א הטענה הבאה:

לכל מספר טבעי, בתחום שבין המספר עצמו לפעמיים המספר (כולל קצוות) יש לפחות מספר ראשוני אחד.

מותר להשתמש אך ורק בסימנים הבאים: סימני משתנים x_1, x_2, \dots קשרים $\leftrightarrow, \rightarrow, \wedge, \vee$

והסימנים $\exists, \forall, (,), \in, \square, \leq, 1, 2, 3, \dots, =, |$ פירושו מחלק.

יד. הצרינו את הטענה הבאה: בקבוצה A יש לכל היותר שני מספרים טבעיים. השתמשו רק בסימנים הבאים:

סימני משתנים x, y, z סימני קבוצות A, \square וכן סוגריים, קשרים, כמתים, ופרדיקטים:

$\exists, \forall, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, (,), \in, \notin, \neq, =$

טו. הצרינו את הטענה לא תמיד נכון שאם $A \subseteq B$ אז $A \square B$

מותר להשתמש רק בסימנים הבאים: סימני קבוצות A, B (מותר לצרף אותם לקבוצה בחזקת קבוצה)

סוגריים, קשרים, כמתים, ופרדיקטים: $\exists, \forall, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, (,), \in, \neq, =$ אין להשתמש בקשר השלילה

טז. הצרינו את הטענה הבאה: קבוצת הפונקציות החז"ע מהממשיים לטבעיים אינה ריקה.

השתמשו רק בסימנים הבאים: סימני משתנים x, y סימני קבוצות \square, \square (וצרופי חזקות שלהן)

סימני פונקציות f, g סוגריים, קשרים, וכמתים: $\exists, \forall, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, (,), \{, \}, \in, \neq, =$

יז. הצרינו את כלל הכפל של אי שוויון ממשי (קטן או שווה) במספר ממשי שונה מאפס.

מותר להשתמש אך ורק בסימנים הבאים: סימני משתנים x_1, x_2, \dots קשרים $\leftrightarrow, \rightarrow, \wedge, \vee$

והסימנים $\forall, (,), \in, \square, \leq, 0$ דוגמה לכלל הזה היא: מאי השוויון $3.14 \leq \pi$ (ע"י כפל במינוס חצי לקבל את

אי השוויון $-0.5\pi \leq -1.57$).

(17) נתונה הקבוצה $\{x \in \square \mid \forall y \in \square [(y \in \{t \in \square \mid t > 3\} \rightarrow (y > x))]\}$ כתוב אותה בצורה $\{x \in \square \mid \dots\}$ כך שבאגף ימין

לא יופיע אף משתנה חוץ מ- x .

(18) תאר במדויק את הקבוצה: $A = \{x \in \square \mid \exists y \in \square (x = y^2) \rightarrow (x > 2)\} - \{x \in \square \mid |x| > 1\}$

(19) הוכח כי ההנחה A גוררת טאוטולוגית את המסקנה $\neg(\neg A)$ בעזרת כללי ההיסק הבאים:

$$\Rightarrow p \rightarrow p \quad (1)$$

$$p \Rightarrow q \rightarrow p \quad (2)$$

$$p \rightarrow q, p \rightarrow (\neg q) \Rightarrow \neg p \quad (3)$$

את המסקנה A מותר להשתמש רק בכללי ההיסק הבאים:

$$B \vee D$$

$$C \rightarrow B$$

$$D \rightarrow (A \vee C)$$

$$\neg B$$

(20) הוכח בעזרת ההנחות

$$P \Rightarrow Q \vee P$$

$$P \wedge Q \Rightarrow P$$

$$P \wedge Q \Rightarrow Q$$

$$P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \Rightarrow P \rightarrow R$$

$$P, P \rightarrow Q \Rightarrow Q$$

$$\neg P, P \vee Q \Rightarrow Q$$

$$P \Rightarrow \neg\neg P$$

$$P \rightarrow Q \Rightarrow \neg Q \rightarrow \neg P$$

תרגילים בנושא קבוצות

(1) לכל אחת מהטענות הבאות, אם הטענה נכונה אז ציין רק שהטענה נכונה ואם הטענה אינה נכונה אז ציין שהטענה לא נכונה ותן דוגמה נגדית והראה כי הדוגמה שנתת באמת מהווה דוגמה נגדית. ערך רב יותר יש לדוגמה מינימלית. (בדוק האם בדוגמה שנתת יש פרטים מיותרים והסר אותם).
את הטענות הנכונות מבין 10-17 נסה להוכיח. רצוי להוכיח גם את טענה 9) בה נשתמש יותר מאוחר להוכחת תכונות של קבוצת חזקה

- (א) אם $x \notin A$ אז $x \notin A \cup B$.
- (ב) אם $x \notin A \cup B$ אז $x \notin A$.
- (ג) אם $x \notin A$ אז $x \notin A \cap B$.
- (ד) אם $x \notin A \cap B$ אז $x \notin A$.
- (ה) אם $x \notin A$ אז $x \notin A - B$.
- (ו) אם $x \notin A - B$ אז $x \notin A$.
- (ז) אם $x \in B$ אז $x \notin A - B$.
- (ח) אם $x \notin A - B$ אז $x \in B$.
- (ט) $(A \subseteq B \wedge A \subseteq C) \Leftrightarrow A \subseteq B \cap C$
- (י) $(A \subseteq B \vee A \subseteq C) \Leftrightarrow A \subseteq B \cup C$
- (יא) אם $A = A \cup B$ אז $A \subseteq B$
- (יב) אם $A = A \cup B$ אז $B \subseteq A$
- (יג) אם $A = A \cap B$ אז $A \subseteq B$
- (יד) אם $A = A \cap B$ אז $B \subseteq A$
- (טו) אם $A \subseteq B$ אז $A = A \cup B$
- (טז) אם $B \subseteq A$ אז $A = A \cup B$ (ז')

$$(יז) \text{ אם } A \subseteq B \text{ אז } A = A \cap B$$

$$(יח) \text{ אם } B \subseteq A \text{ אז } A = A \cap B$$

$$(יט) \text{ } x \notin A \Leftrightarrow x \notin A - B$$

$$(כ) \text{ } x \in B \Leftrightarrow x \notin A - B$$

$$(כא) \text{ השלם } \Leftrightarrow x \notin A - B$$

(2) יהיו A, B, C קבוצות הוכח או הפרך כ"א מהטענות הבאות.

$$(א) \text{ אם } A = A - B \text{ אז } B = \emptyset$$

$$(ב) \text{ אם } A = A - B \text{ אז } A \cap B = \emptyset$$

$$(ג) \text{ אם } A = A \cup B \text{ אז } A \cap B = B$$

$$(ד) \text{ אם } B = A \cup B \text{ אז } A \cap B = B$$

$$(ה) \text{ אם } A \cap B = A \text{ אז } A = A \cup B$$

$$(ו) \text{ אם } A \cap B = B \text{ אז } A = A \cup B$$

(ז) אם $A \cup B = A \cup C$ וגם $A \cap B = A \cap C$ אז $B = C$. (מבחן סמסטר קיץ תשס"ח, מועד ב')

$$(ח) \text{ } A \cup (B - C) = (A \cup B) - C$$

$$(ט) \text{ } A \cup (B - C) = (A \cup B) - (A \cap C)$$

$$(י) \text{ } (A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$$

$$(יא) \text{ } (A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$$

$$(יב) \text{ } A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$$

$$(יג) \text{ } (A - B) \cap (C - D) = (A \cap C) - (B \cup D)$$

$$(יד) \text{ } A \cap B \cap C \subseteq A \oplus B \oplus C$$

$$ב. \text{ } A \oplus B \oplus C \subseteq A \cap B \cap C$$

לפתרון מלא בסרטון וידאו היכנסו ל- www.GooL.co.il

כתב ופתר - טל פלדמן ©

שיעורים פרטיים לבוחדים ולקבוצות 054-7599493

(3) הוכח כל אחת מהטענות הבאות בדרך השלילה.

במקום הטענה אם α אז β מוכיחים אם $\neg\beta$ אז $\neg\alpha$.

ויש לזכור תמיד שלהנחת השלילה $\neg\beta$ ולכל הנובע ממנה מתייחסים כנתון.

(א) אם $A \cap C = \emptyset$ אז $A - (B - C) \subseteq (A - B) - C$

(ב) אם $A \subseteq B$ אז $(A - C) \cup (C - B) \subseteq A \cap B$

(ג) אם $(A - C) \cap B = \emptyset$ אז $(A \cup B) - C \subseteq A - B$

(ד) אם $B \subseteq A$ אז $(C - A) \cup (B - C) \subseteq A - B$

(ה) אם $A \subseteq A \Delta B$ וגם $B - C = B \Delta C$ אז $A \cap C = \emptyset$.

(ו) אם $A \subseteq A \oplus B$ וגם $B - C \subseteq B \oplus C$ אז $A \cap C = \emptyset$

ועכשיו קצת על קבוצת חזקה.

(4) הוכח או הפרך כ"א מהטענות הבאות.

(א) $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$

(ב) $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$

(ג) $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$

(ד) $P(A) \cap A \neq \emptyset$

(ה) $P(A) \cap A = \emptyset$.

(ו) אם $\{A\} \subseteq P(B)$ אז $P(A) \subseteq P(B)$

את שתי הטענות הבאות הוכח בדרך השלילה

(ז) אם $A \cap B = \emptyset$ אז $P(A) \subseteq P(A - B)$

(ח) אם $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$ אז $(A \subseteq B) \vee (B \subseteq A)$ (שאלה קשה).

(5) משהו גם על מכפלות קרטזיות. (נצטרך את זה גם ליחסים)

$$(A = B) \Leftrightarrow (A \times A = B \times B) \quad (\text{א})$$

$$((B = \emptyset) \vee (A = \emptyset) \vee (A = B)) \Leftrightarrow (A \times B = B \times A) \quad (\text{ב})$$

(ג) הוכח כי לכל 4 קבוצות A, B, C, D מתקיים: $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

(ד) אם $((A \times A) \cup (B \times B) = (C \times C))$ אז $((B \subseteq A) \vee (A \subseteq B)) \wedge (A \cup B \subseteq C)$

(ה) הוכח כי לכל 4 קבוצות A, B, C, D מתקיים: $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$.

(6) הוכיחו או הפריכו: תהיינה A, B שתי קבוצות כלשהן ותהי $S \subseteq A \times B$ אז קיימות $C \subseteq A$

$$S = C \times D \text{ -ש- } D \subseteq B \text{ -ו-}$$

(7) הוכיחו או הפריכו: לכל שתי קבוצות A, B מתקיים: $\overline{A \oplus B} = \overline{A} \oplus \overline{B}$

(8) הוכיחו או הפריכו: קיימות שלוש קבוצות A, B, C שלושן לא ריקות ושונות זו מזו

$$A \cup (B - C) \subseteq A \cap (B - C) \text{ -ש-}$$

(9) תהיינה A, B, C קבוצות כלשהן. נתון $P(A) - P(B) = P(B) - \{\emptyset\}$ הוכח כי $B - A = B$

(10) הוכח כי אם $A \Delta B \subseteq A \Delta C$ אז $A \cap C \subseteq B$

(11) הוכח או הפרך: קיימות שתי קבוצות A, B כך ש- $|A \times B| = 24$ וגם $|A \cap B| = 5$

(12) תהיינה A, B, C קבוצות כלשהן. נתון $A \cap B = \emptyset$ הוכח כי $(A \Delta C) \cup (B \Delta C) = A \cup B \cup C$

(13) הוכח או הפרך: לכל שלוש קבוצות A, B, C מתקיים $A \times (B \oplus C) = (A \times B) \oplus (A \times C)$

(14) תן דוגמא לקבוצה A שמקיימת $A \cap P(A) \cap P(P(A)) \neq \emptyset$

(15) לכל שלוש קבוצות A, B, C מתקיים: $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus (C \setminus B))$

תרגילים בנושא פונקציות

(1) (חימום)

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n+1}{2} & \text{אם } n \text{ אי זוגי} \\ n-1 & \text{אם } n \text{ זוגי} \end{cases}$$

יהיו f ו- g הפונקציות מ- \mathbb{N} ל- \mathbb{N} המוגדרות כך:

$$g(n) = 2n - 1, \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{לכל}$$

הוכח או הפרך כל אחת מן הטענות הבאות:

I. f היא חד-חד-ערכיתII. g היא חד-חד-ערכיתIII. f היא על \mathbb{N} IV. g היא על \mathbb{N} V. $f \circ g$ היא פונקצית הזהות על \mathbb{N} VI. $g \circ f$ היא פונקצית הזהות על \mathbb{N}

(2) לגבי כל אחת מהפונק' הבאות קבע האם היא חז"ע והאם היא על. נמק.

$$א. f_1(x) = \frac{2x}{x+3}, \quad f_1: (0, \infty) \rightarrow (0, 2)$$

$$ב. f_2(x) = x + \frac{1}{x}, \quad f_2: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$$

$$ג. f_3(x) = x - \frac{1}{x}, \quad f_3: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$ד. f_4(X) = X \cap \mathbb{N}, \quad f_4: P(\mathbb{N}) \rightarrow P(\mathbb{N})$$

$$ה. f_5(X) = X \cap \mathbb{Z}, \quad f_5: P(\mathbb{N}) \rightarrow P(\mathbb{N})$$

$$ו. f_7(X) = X \Delta \mathbb{N}, \quad f_7: P(\mathbb{N}) \rightarrow P(\mathbb{N})$$

$$ז. f_8(n) = \text{the sum of the digits of } n, \quad f_8: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

(3) יהי $f: B \rightarrow C, g: A \rightarrow B$ שתי פונקציות (כמובן שבתנאים אלו $f \circ g: A \rightarrow C$) הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות (במקרה של הפרכה בחר $A=B=C=\square$)

- א. אם f חח"ע וגם g חח"ע אז $f \circ g$ חח"ע.
- ב. אם $f \circ g$ חח"ע אז f חח"ע.
- ג. אם $f \circ g$ חח"ע אז g חח"ע.
- ד. אם f על וגם g על אז $f \circ g$ על.
- ה. אם $f \circ g$ על אז f על.
- ו. אם $f \circ g$ על אז g על.
- ז. אם $f \circ g$ חח"ע וגם g על אז f חח"ע.
- ח. אם $f \circ g$ על וגם f חח"ע אז g על.
- ט. אם f לא חח"ע וגם g לא על אז $f \circ g$ לא חח"ע או $f \circ g$ לא על.

(4) תהי A קבוצה כלשהי ותהיינה $f, g, h: A \rightarrow A$ הוכח או הפרך כ"א מהטענות הבאות.

- א. אם $g \circ f = h \circ f$ אז $g = h$.
- ב. אם $g \circ f = h \circ f$ וגם f על אז $g = h$.
- ג. אם $g \circ f = h \circ f$ וגם f חח"ע אז $g = h$.
- ד. אם $f \circ g = f \circ h$ אז $g = h$.
- ה. אם $f \circ g = f \circ h$ וגם f חח"ע אז $g = h$.
- ו. אם $f \circ g = f \circ h$ וגם f על אז $g = h$.

(5) נתונות פונקציה $f: A \rightarrow B$ וקבוצות $C, D \subseteq A$.

- א. הוכח כי $f(C \cap D) \subseteq f(C) \cap f(D)$.
- ב. הוכח שאם f היא חד-חד-ערכית אז $f(C \cap D) = f(C) \cap f(D)$.
- ג. הדגם קבוצות $C, D \subseteq \square$ ופונקציה $f: \square \rightarrow \square$ כך ש- f על וגם $f(C \cap D) \subset f(C) \cap f(D)$.
- ד. הוכח כי $f(C \cup D) = f(C) \cup f(D)$.

(6) תהי A קבוצה ותהי $f: A \rightarrow A$ פונקציה הוכח או הפוך כל אחת מהטענות הבאות.

א. אם $f \circ f = f$ אז $f = I$.

ב. אם $f \circ f = f$ אז $f = I$ או ש- f היא פונקציה קבועה.

ג. אם $f \circ f = f$ וגם f חח"ע אז $f = I$.

ד. אם $f \circ f = f$ וגם f על אז $f = I$.

(7) יהיו $f, g, h: \square \rightarrow \square$ הפרך כל אחת מהטענות הבאות. (שאלה קשה מאוד)

א. אם $f \circ g = f \circ h$ וגם f על וגם g, h חח"ע וגם אז $g = h$.

ב. אם $g \circ f = h \circ f$ וגם f חח"ע וגם g, h על אז $g = h$.

ג. אם $f \circ f \circ f = I$ אז $f \circ f = I$.

ד. אם $f \circ f \circ f = f \circ f$ אז $f \circ f = f$.

(8) תהי A קבוצה ו- B תת קבוצה החלקית ממש ל- A . נתונות הפונקציות $f, g: P(A) \rightarrow P(A)$

$$\begin{aligned} g(X) &= X \cap B && \text{המוגדרות באופן הבא:} \\ f(X) &= A - X && \text{הוכח או הפוך: } f \circ g \text{ על.} \end{aligned}$$

(9) הוכח או הפוך את הטענה הבאה: הפונקציה $f: \square \times \square \rightarrow \square \times \square$ המוגדרת על-ידי

$$f((x, y)) = (3x + 4y, 4x + 5y)$$

היא פונקציה הפיכה.

(10) תהי $P_{\text{even}}(\square)$ קבוצת כל התת קבוצות של \square שעוצמתן זוגית. ותהי $P_{\text{odd}}(\square)$ קבוצת כל התת

קבוצות של \square שעוצמתן אי זוגית. לדוגמה $\{1, 3\} \in P_{\text{even}}(\square), \{1, 3\} \notin P_{\text{odd}}(\square)$ ולעומת זאת

$\{2, 4, 6\} \in P_{\text{odd}}(\square), \{2, 4, 6\} \notin P_{\text{even}}(\square)$. לכל קבוצה A סופית של טבעיים נסמן ב- $\max(A)$

את המספר הגדול ביותר ב- A וב- $\max(\emptyset) = 0$ הוכיחו כי הפונקציה $f: P_{\text{even}}(\square) \rightarrow P_{\text{odd}}(\square)$

המוגדרת על ידי $f(A) = A \cup \max(A)$ היא חח"ע אך אינה על.

(11) נגדיר פונקציה $F : \{0,1\}^{\square} \rightarrow P(\{0,1\} \times \{0,1\})$ באופן הבא:

$$F(g) = \{(g(n), g(n+1)) \mid n \in \square\}$$

הוכי כי F אינה על.

(12) נגדיר פונקציה $h : \square \rightarrow \square$ כך: $h(x) = 2x$ הוכח כי $\{f \circ h \mid f \in \square^{\square}\} = \square^{\square}$

(13) נגדיר את היחס R מעל $P(\square)$ באופן הבא: $ARB \Leftrightarrow \exists b \in B (\forall a \in A (a < b))$

בנה פונקציה $f : \square \rightarrow P(\square)$ שמקיימת: $\forall x, y \in \square (x < y \Leftrightarrow f(x) R f(y))$

(14) נתונות שלוש פונקציות $f, g, h : \square \rightarrow \square$

הוכח כי אם $f \circ g$ חח"ע וגם $g \circ h$ חח"ע וגם $h \circ g \circ f$ על אז f, g, h שלושתן הפיכות.

(15) בנה באופן מפורש תת קבוצה של $\{0,1\}^{\square}$ ששקולה ל- \square

(16) נגדיר $F : \square^{\square} \rightarrow P(\square)$ באופן הבא: $F(f) = \{n \in \square \mid f(x) = 1\}$ הוכח כי F אינה חח"ע.

(17) נגדיר פונקציה $F : \{0,1,2\}^{\square} \rightarrow P(\square)$ באופן הבא: $F(f) = \{n \in \square \mid f(n) = 0\}$

קבע האם F חח"ע ועל.

(18) תהי \square הטבעיים ותהי $B \subseteq \square$ תת קבוצה סופית לא ריקה נתונה.

דוגמה: עבור $B = \{1,2\}$ מתקיים: $f(\{2,3\}) = \{3\}, f(\{3,4\}) = \{1,2,3,4\}$

א. הוכח כי אם $X \cap B = \emptyset$ אז $f(f(X)) = X$.

ב. הוכח כי אם $B \subseteq X$ אז $f(f(X)) = X$.

ג. הוכח כי אם X שייכת לתמונה של הפונקציה אז $f(f(X)) = X$.

ד. האם הפונקציה חח"ע?

ה. האם הפונקציה על?

ו. מה העוצמה של התמונה של הפונקציה?

תרגילים בנושא עוצמות

(1) הוכח את השקילות הבאות באמצעות פונקציות חח"ע ועל בין הקבוצות. (פונקציית שקילות).

א. $\mathbb{Q} \times \{0,1\} \cong \mathbb{Q} \times (-1,1)$ ב. $\mathbb{Q} \times \{0,1\} \cong \mathbb{Q} \times [0,1]$ ג. $\mathbb{Q} \times \{0,1\} \cong \mathbb{Q} \times [0,\infty)$ ד. $\mathbb{Q} \times \{0,1\} \cong \mathbb{Q} \times [0,1]$

ה. $[1,3] \cup [4,8] \cong [0,1]$ ו. $\{0,1\} \cong \{0,1\}^{\text{even}} \times \{0,1\}^{\text{odd}}$ ז. $(0,1] \cong (0,1)$

(2) הוכח כי $\{(x,y) | x^2 + y^2 = 1\} \cong \{(x,y) | x^2 + y^2 = 4\}$

(3) הוכח (ישירות ע"י מציאת פונקציה מתאימה) כי הקטע $(0,2010)$ שקול ל- $(0,\infty)$ ורישמו עוצמתם.

(4) הוכח כי אם $A \cong B$ וגם $C \cong D$ וגם $A \cap C = \emptyset$ וגם $B \cap D = \emptyset$ אז $(A \cup C) \cong (B \cup D)$

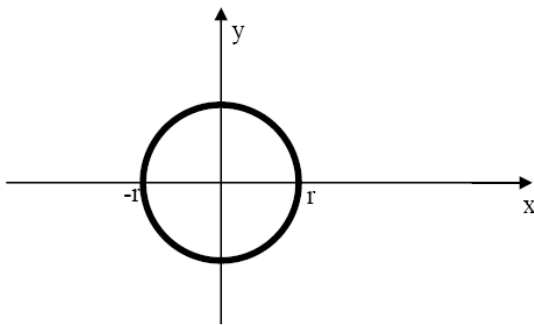
(5) הוכח כי אם $A \cong B, C \cong D$ אז $A \times C \cong B \times D$

(6) הוכח כי $\aleph_0 + n = \aleph_0$ כאשר $n \in \mathbb{N}$.

(7) הוכח את הטענה הבאה: הקבוצה $A = \mathbb{N}$ קבוצת המספרי הרציונלים

ו- $B = \{f(x) = ax^2 + bx + c : a, b, c \in \mathbb{N}\}$ הן שוות עוצמה.

(8) מעגל במישור ברדיוס r ($r > 0$ ממשי) שמרכזו בראשית הצירים הוא קבוצת כל הנקודות (x, y)



במישור המקיימות את המשוואה $x^2 + y^2 = r^2$ כמודגם ב

הוכיחו שלכל $r > 0$ עוצמת מעגל ברדיוס r

שמרכזו בראשית הצירים היא \aleph_0

(9) הוכח או הפרך: תהיינה A, B שתי קבוצות כלשהן. אם $A \oplus B$ היא קבוצה מעוצמה \aleph_0 וגם $A \cap B$ היא

קבוצה מעוצמה \aleph_0 אז $A \cup B$ היא קבוצה מעוצמה \aleph_0 .

(10) תהי $A = \left\{ x \in \mathbb{Q} \mid \forall n \in \mathbb{N} \left(x < \frac{1}{n} \right) \wedge \exists n \in \mathbb{N} \left(x > -\frac{1}{n} \right) \right\}$ מה עוצמת A ?

(11) תהי $A = \{(a,b) | a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q}, a < b\}$ כלומר A היא קבוצת כל הקטעים הפתוחים ב- \mathbb{Q} מהיא

עוצמת A ?

הוכיחו טענתכם.

(12) נסמן ע"י \square את קבוצת המספרים הטבעיים $\square = \{1, 2, 3, \dots\}$ וב- \square^+ את הממשיים החיוביים

א. מה העוצמה של הקבוצה: $A_4 = \{a \in \square \mid a^4 \in \square\}$? למשל $1, \sqrt{5}, 2, \sqrt[4]{7} \in A_4$

ב. מה העוצמה של $A = \{a \in \square^+ \mid \exists k \in \square, a^k \in \square\}$? למשל $1, \sqrt{5}, 2, \sqrt[4]{7}, \sqrt[100]{3}, \sqrt[3]{4} \in A$

(13) נגדיר $P_2(\square) = \{A \subseteq \square \mid |A| = 2\}$ כלומר $P_2(\square)$ היא קבוצת כל התת קבוצות בנות שני אברים של

טבעיים. מהי עוצמת $P_2(\square)$ הוכיחו טענתכם.

(14) נגדיר יחס S מעל $\square \times \square$ באופן הבא: $\lfloor x_1 \rfloor = \lfloor y_1 \rfloor \Leftrightarrow (x_1, x_2) S (y_1, y_2)$. יחס שקילות.

(אין צורך להוכיח) הוכח כי קבוצת המנה $(\square \times \square) /_S$ היא מעוצמה \aleph_0 .

(15) הוכח או הפרך: לכל קבוצה A מתקיים: $A \times \square \cong A \times (\square - \{1\})$

(16) הוכח כי עוצמת הקבוצה $(1, 2) \cup (2, 3) \cup (3, 4) \cup \dots = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (n, n+1)$ היא \aleph .

(17) תהי A קבוצה מעוצמה \aleph_0 ויהי E יחס שקילות מעל A הוכח כי $|E| = \aleph_0$

(18) הוכח או הפרך את הטענה הבאה: לכל זוג קבוצות A, B מתקיים: $(A \times B)^c \cong (A^c \times B) \cup (A \times B^c)$

(19) פונקציית הסינוס $\sin: \square \rightarrow \square$ היא פונקציה מחזורית בעלת מחזור של 2π . כלומר

$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$$

לכל $x \in \square$. עבור $0 \leq x \leq 2\pi$ מתקיים: $\sin x = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, \pi, 2\pi\}$

מצא את עוצמת הקבוצה $0_{\sin} = \{x \in \square \mid \sin x = 0\}$ הוכח טענותיך.

(20) האם קיימת קבוצה A כך ש- $|P(A)| = \aleph_0$? הוכח טענותיך.

(21) תהיינה k_1, k_2 עוצמות ויהיו A, B קבוצות כך ש- $|A| = k_1, |B| = k_2$. נגדיר פעולת הפרש בין עוצמות באופן

הבא: $k_1 - k_2 = |A - B|$. פעולה זו אינה מוגדרת היטב, כלומר תוצאות של ההפרש משתנות בהתאם

לקבוצה ולא בהתאם למחלקה. הציגו 2 דוגמאות לקבוצות שעוצמתן \aleph_0 אך עוצמת ההפרש שונה בכל

אחת מהדוגמאות.

תרגילים ביחסים

(1) (חימום) רשום במפורש את היחסים כקבוצה של זוגות סדורים.

א. היחס R המוגדר מעל A באופן הבא: $aRb \Leftrightarrow b > a + 3$ כאשר:

$$A = \{5, 6, 7\} \quad (ii) \quad A = \{3, 5, 19, 103\} \quad (ii) \quad A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \quad (i)$$

(2) נתונים שני היחסים הבאים מעל $A = \{1, 2, 3\}$

$$R_1 = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3)\} \quad R_2 = \{(1, 2), (2, 2), (2, 3), (2, 1)\}$$

עבור כל אחד מארבעת היחסים $R_1, R_2, R_1 \cap R_2, R_1 \cup R_2$ קבע האם הוא רפלקסיבי, סימטרי, טרנזיטיבי.
(במקרה של הפרכה הבא דוגמה מתאימה)

(3) לגבי כל אחד מהיחסים הבאים, רשום שלושה זוגות שנמצאים ביחס, ונמק מדוע הם ביחס. כתוב שלושה זוגות שאינם ביחס, ונמק מדוע אינם ביחס. כמו כן קבע האם היחס הוא רפלקסיבי, אנטי רפלקסיבי, סימטרי, א"ס חלש, א"ס חזק, וטרנזיטיבי.

(א) יחס $@$ מעל \mathbb{Z} המוגדר באופן הבא: $(x, y) \in @ \Leftrightarrow |x - y| \leq 100$.

(ב) יחס \clubsuit מעל \mathbb{Z} המוגדר באופן הבא: $(x, y) \in \clubsuit \Leftrightarrow 3|x - y|$.

(ג) היחס \subseteq מעל $P(\mathbb{Z})$ המוגדר באופן הבא: $A \subseteq B \Leftrightarrow (A, B) \in \subseteq$.

(ד) היחס שרגא מעל \mathbb{Z} המוגדר באופן הבא: שרגא $(x, y) \Leftrightarrow x + y \geq x \cdot y$

(ה) יחס T מעל \mathbb{Z} המוגדר באופן הבא: $(x, y) \in T \Leftrightarrow x^2 + y \geq 1$

(4) מצא אלו מהתכונות: רפלקסיביות, אנטי רפלקסיביות, סימטריות, אנטי סימטריות חלשה, אנטי סימטריות חזקה וטרנזיטיביות מקיים כל אחד מהיחסים הבאים. מעל הקבוצות

$$\mathbb{Z}, \mathbb{N}, A = \{3, 5, 7, 9\}$$

א. $xRy \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N}_{\text{odd}} x = my$

ב. $xRy \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N}_{\text{even}} x = my$

ג. $xRy \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N}_{\text{odd}} (x = my \vee y = mx)$

(5) תהי A קבוצה ו- R יחס מעל A הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות.

בכל המקרים בהם בחרת להפריך תן דוגמה נגדית מינימלית. בדוק האם יש בדוגמתך פרטים מיותרים והסר אותם.

א. אם R סימטרי אז R טרנזיטיבי.

ב. אם R אנטי סימטרי חלש אז R טרנזיטיבי.

ג. אם R סימטרי וגם אנטי סימטרי חלש אז R טרנזיטיבי.

ד. אם R סימטרי וגם אנטי סימטרי חלש אז $R = \emptyset$.

ה. אם R סימטרי וגם אנטי סימטרי חזק אז $R = \emptyset$.

ו. אם R טרנזיטיבי וסימטרי אז R רפלקסיבי.

ז. אם R טרנזיטיבי ואנטי רפלקסיבי אז R אנטי סימטרי חזק.

ח. אם R טרנזיטיבי ולא סימטרי אז R אנטי סימטרי חלש.

(6) תהי A קבוצה ויהיו R, S יחסים מעל A הוכח או הפרך את הטענות הבאות (הפרכה = דוגמה מינימלית)

א. אם R, S רפלקסיבים אז $R \cap S$ רפלקסיבי.

ב. אם R, S רפלקסיבים אז $R \cup S$ רפלקסיבי.

ג. אם R, S סימטרים אז $R \cap S$ סימטרי.

ד. אם R, S סימטרים אז $R \cup S$ סימטרי.

ה. אם R, S טרנזיטיבים אז $R \cap S$ טרנזיטיבי.

ו. אם R, S טרנזיטיבים אז $R \cup S$ טרנזיטיבי.

ז. אם R, S יחסי שקילות אז $R \cap S$ יחס שקילות.

ח. אם R, S יחסי שקילות אז $R \cup S$ יחס שקילות.

ט. אם R, S אנטי סימטרים חלש אז $R \cap S$ אנטי סימטרי חלש.

י. אם R, S אנטי סימטרים חלש אז $R \cup S$ אנטי סימטרי חלש.

(7) יהי R יחס סדר חלש מעל A ויהי S יחס סדר חלש מעל B . הוכח כי אם $A \cap B = \emptyset$ אז $R \cup S$ יחס

סדר חלש מעל $A \cup B$.

(8) הוכח כי היחס R המוגדר מעל הקבוצה $A = \{2^k \mid k \in \mathbb{N}\}$ ע"י $aRb \Leftrightarrow a|b$ הוא יחס סדר מלא.

(9) נגדיר יחס R מעל הקבוצה $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ באופן הבא: $(a,b)R(c,d) \Leftrightarrow (a \leq c \wedge b \leq d)$

א. הוכח כי R יחס סדר חלש שאינו מלא.

ב. מצא תת קבוצה אינסופית של $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ שעליה היחס R הוא מלא.

(10) תהי $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ קבוצת כל הזוגות הסדורים של המספרים הטבעיים.

ויהי $R \subseteq A^2$ יחס המוגדר על ידי: $(m_1, n_1)R(m_2, n_2) \Leftrightarrow m_1 - m_2 = n_1 - n_2$

א. הוכח כי R הינו יחס שקילות ב- A .

ב. תארו באופן גרפי את מחלקות השקילות הבאות. $[(1,1)]_R, [(1,2)]_R, [(2,1)]_R$.

(11) יהי R יחס סימטרי וטרזיטיבי מעל A כך ש: $\forall a \in A \exists b \in A aRb$ הוכח כי R רפלקסיבי.

(12) נתון היחס R מעל \mathbb{Z} . $xRy \Leftrightarrow (6 \mid x - y) \vee (3 \mid x \cdot y)$ (אין צורך להוכיח כי R יחס שקילות)

מצא את מחלקות השקילות ואת קבוצת המנה.

(13) נגדיר יחס בינארי E מעל $\mathbb{Z} - \{0,1\}$ (קבוצת השלמים ללא 0 ו-1) באופן הבא: $aEb \Leftrightarrow ab \geq -1$ הוכח כי

E יחס שקילות ותן תיאור מפורש של מחלקות השקילות שלו.

(14) תהי S קבוצה שאבריה הן קבוצות מגדירים יחס בינארי E מעל S באופן הבא: $(A \subseteq B \wedge B \subseteq A) \Leftrightarrow AEB$

הוכיחו או הפריכו: E יחס שקילות.

(15) יחס R מעל A נקרא סוגר משולשים אם לכל $a, b, c \in A$ מתקיים: $(aRb \wedge bRc) \rightarrow cRa$

א. הוכח כי יחס רפלקסיבי וסוגר משולשים הוא יחס שקילות.

ב. הוכח כי אם R סימטרי, סוגר משולשים ואינו ריק אז R אינו אנטי רפלקסיבי.

(16) נגדיר יחס סדר (חלש) S מעל \mathbb{Z} באופן הבא: $xSy \Leftrightarrow \neg((\lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor \rightarrow y < x))$

אין צורך להוכיח שמדובר ביחס סדר. כתוב במפורש את כל האיברים המינימלים של S .

תזכורת $x \in A$ נקרא מינימלי ביחס סדר R אם $\forall y \in A ((y \neq x) \rightarrow \neg(yRx))$

(17) נגדיר יחס שקילות S מעל \mathbb{Z} באופן הבא: $xSy \Leftrightarrow (x = y = 0) \vee (xy > 0)$

נגדיר יחס שקילות T מעל \mathbb{Z} באופן הבא: $xTy \Leftrightarrow (x^2 - 9)S(y^2 - 9)$

אין צורך להוכיח כי מדובר ביחסי שקילות. כתוב במפורש את קבוצת המנה \mathbb{Z}/T ונמק בקצרה.

(18) נגדיר יחס בינארי D מעל הקבוצה $\square^2 = \{(a,b) \mid a \in \square, b \in \square\}$

באופן הבא: $(a_1, b_1) D (a_2, b_2) \Leftrightarrow (a_1 \geq a_2) \wedge (a_1 + b_1 \geq a_2 + b_2)$

הוכח כי D יחס סדר חלש שאינו מלא.

(19) רשום במפורש את כל יחסי השקילות E מעל $S = \{a, b, c, d\}$ המקיימים $|S/E| = 2$ וכל מחלקות השקילות הן

שוות עוצמה. יש להציג כל יחס כתת קבוצה מפורשת של $S \times S$.

(20) יהיו R, S יחסי שקילות מעל A . הוכח כי $R \Delta S$ לא יחס שקילות מעל A .

(21) הוכח או הפרך: לכל קבוצה A ולכל יחס רפלקסיבי R מעל A קיימות קבוצות $B, C \subseteq A$ כך ש- $R = B \times C$

(22) יהי S יחס אנטי רפלקסיבי וטרנזיטיבי מעל קבוצה A . ונניח ש'יים $y \in A$

עבורו מתקיים: $\forall x \in A (x, y) \in S$ הוכח כי לכל $z \in A$ מתקיים: $(y, z) \notin S$

(23) יהי S יחס המוגדר מעל $P(\square)$ קבוצת החזקה של \square באופן הבא: $\min A = \min B \Leftrightarrow ASB$

כאשר $\min A$ הוא המספר הקטן ביותר ב- A .

א. הוכח כי S הינו יחס שקילות.

ב. נסמן ב- K את קבוצת מחלקות השקילות של היחס S .

בנה פונקציה $F: K \rightarrow \square$ חח"ע ועל.

פונקציות ויחסים משולב

(24) תהיינה A, B שתי קבוצות לא ריקות ויהיו $<_A, <_B$ שני יחסי סדר חזקים ומלאים (משווים) מעל A, B

בהתאמה. ותהי $f: A \rightarrow B$ פונקציה המקיימת אם $a_1 <_A a_2$ אז $f(a_1) <_B f(a_2)$. הוכח כי f הח"ע אך אינה בהכרח על.

(25) יחס T מעל \square מוגדר באופן הבא: $fTg \Leftrightarrow f \circ g = g \circ f$ הוכח או הפרך: יחס שקילות

(26) תהי J קבוצת כל היחסים מעל A ו- E קבוצת כל יחסי השקילות מעל A .

נגדיר פונקציה $F: J \times E \rightarrow J$ באופן הבא: $F(R, S) = R \cap S$. הוכח כי F על.

(27) נגדיר יחס S על הקבוצה $\square \times \square$ באופן הבא: $(x_1, x_2)S(y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1^2 - x_2 = y_1^2 - y_2$

S יחס שקילות. (אין צורך להוכיח). הוכח כי קבוצת המנה $\square \times \square / S$ שוות עוצמה לקבוצה \square

(28) תהי $F: A \rightarrow A$ פונקציה. נגדיר יחס R מעל A באופן הבא: $aRb \Leftrightarrow f(a) = b$ נתון ש- R סימטרי

וטרנזיטיבי. הוכח כי F היא פונקצית הזהות.

(29) תהי A קבוצה לא ריקה ותהי A^A קבוצת כל הפונקציות מ- A ל- A . מגדירים יחס E מעל A^A באופן הבא:

לכל $f, g \in A^A$ אם ורק אם קיימת $h \in A^A$ הפיכה כך ש- $f = h \circ g$.

א. הוכח כי E יחס שקילות.

ב. הי $c \in A$ כלשהוא. תהי $f_c: A \rightarrow A$ הפונקציה הקבועה המוגדרת ע"י $f_c(x) = c \forall x \in A$ תאר את מחלקת

השקילות של f_c ביחס ל- E (תן תאור מפורש ככל הניתן). נמק טענותיך.

(30) יהי היחס T המוגדר מעל הקבוצה \square באופן הבא: $fTg \Leftrightarrow$ קיים $x \in \square$ כך ש- $f(x) = g(x)$

האם T יחס שקילות?

(31) תהי A קבוצה סופית ותהי B תת קבוצה של A . נסמן ב- F את קבוצת כל הפונקציות מ- A ל- $\{0,1\}$.

נגדיר יחס E מעל F באופן הבא: $F = \{(f, g) \mid B \subseteq \{x \mid f(x) = g(x)\}\}$

א. בהנתן $A = \{1, 2, 3\}$ ו- $B = \{1, 2\}$ תנו דוגמא ל- $f, g, h \in F$ שונות כך ש- $(f, g) \in E, (f, h) \notin E$.

ב. הוכיחו כי E יחס שקילות.

ג. מה עוצמת קבוצת המנה F/E ? נמקו תשובתכם.

תרגילים בקומבינטוריקה בסיסית

(1) בכמה אופנים ניתן לסדר 10 אנשים בשורה כך ש-

- א. ללא הגבלה.
- ב. אבי ובני סמוכים.
- ג. אבי, בני וגדי סמוכים.
- ד. אבי ובני לא סמוכים.
- ה. אבי ובני סמוכים וגם גדי ודני סמוכים.
- ו. אבי ובני סמוכים וגדי ודני לא סמוכים.

(2) בכיתה בה יש 10 בנים ו-15 בנות יש להרכיב נבחרת כדורסל בה יש לפחות 2 בנים ולפחות 2 בנות בכמה דרכים ניתן לעשות זאת?

(3) בכמה אופנים שונים ניתן להניח 8 צריחים על לוח 8×8 בלי שאף צריח יאיים על חברו כך ש-

- א. כל הצריחים הם לבנים.
- ב. שלושה צריחים הם לבנים וחמישה הם שחורים.
- ג. הצריחים נלקחים מתוך שקית ובה מלאי בלתי מוגבל של צריחים לבנים ומלאי בלתי מוגבל של צריחים שחורים.

(4) בכמה מספרים 6 ספרתיים מופיעה הספרה

- א. 0 פעם אחת בדיוק.
- ב. 0 פעם אחת לפחות.
- ג. 7 פעם אחת לפחות.
- ד. 7 פעם אחת בדיוק. יש לזכור שמספר לא יכול להתחיל בספרה 0.

(5) א. יהי n טבעי בכמה תת קבוצות של $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ יש אי זוגי אחד לפחות?

ב. בכמה תת קבוצות של $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ יש לפחות $n+1$ איברים.

(6) בכמה אופנים שונים ניתן לחלק 10 לימונדות זהות 1 כוס קולה ו-1 כוס קינולי ל-4 תלמידים צמאים כך שכל תלמיד מקבל

לפחות משקה אחד והקולה והקינולי ניתנים לתמידים שונים?

(7) בכמה דרכים ניתן לחלק 400 כדורים זהים ל-3 תאים כך ש-

- א. יש תא ובו יותר מ-200 כדורים.
- ב. בכל תא מספר זוגי של כדורים.
- ג. בשני תאים מתוך השלוש מספר אי זוגי של כדורים ובתא אחד מספר זוגי של כדורים.

8) 7 אנשים נכנסים למעלית בבניין בן 13 קומות בכמה אופנים הם יכולים ללחוץ על כפתורי המעלית כך ש-

- המעלית תעצור בקומה החמישית? (יתכן ותמשיך הלאה משם)
- המעלית תעצור בקומה החמישית לכל היותר.
- המעלית תגיע לפחות עד הקומה החמישית.
- המעלית תעצור בקומה החמישית. (ולא תמשיך משם הלאה)

9) בכמה דרכים ניתן לחלק n כדורים לבנים זהים ו- n כדורים צבעוניים (שונים) ל- $2n$ כך שבכל תא יהיה

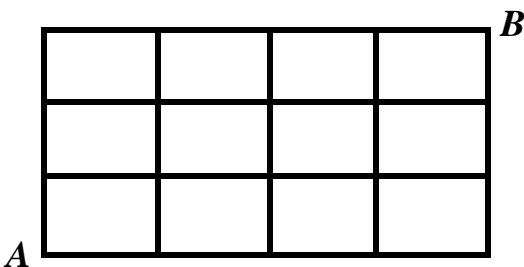
- לכל היותר כדור אחד.
- לכל היותר כדור לבן אחד ואין מגבלה על מספר הצבעוניים.
- לכל היותר כדור צבעוני אחד ואין הגבלה על מספר הלבנים.
- מספר שווה של לבנים וצבעוניים.

10) במלבן בן k שורות ו- m עמודות יש לסמן \times או \square בכל משבצת.

א. הראו כי יש $(2^m - 1)^k$ דרכים לעשות זאת כך שבכל שורה יופיע \times אחד לפחות.

ב. בכמה דרכים ניתן לעשות זאת כך שיופיע \square אחד לפחות בכל עמודה.

ג. הסיקו כי $2^{mk} \leq (2^m - 1)^k + (2^k - 1)^m$



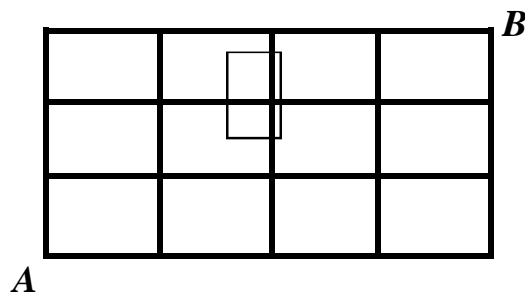
11) חרגול נמצא בנקודה A בשריג המתואר להלן. בכל שלב יכול החרגול

להתקדם צעד אחד ימינה או צעד אחד למעלה.

א. בכמה אופנים שונים יכול החרגול להגיע מנקודה A לנקודה B ?

ב. בכמה אופנים הוא יכול לעשות זאת מבלי לעבור דרך

נקודה המסומנת להלן?



12) א. בכמה אופנים שונים ניתן לחלק 12 אנשים לשלושה זוגות ושתי שלשות?

ב. כמו א. אך בנוסף דני ודנה לא נמצאים באותה קבוצה.

13) כמה פתרונות בשלמים אי שליליים יש לכל אחת מהמשוואות הבאות?

א. $x_1 + x_2 + \dots + x_7 = 20$

ב. $x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 14$

ג. $(x_1 + x_2 + x_3)(x_4 + x_5 + x_6) = 18$

14) בכמה דרכים ניתן לבחור ועדה בת n אנשים מתוך n זוגות נשואים כך ש-

א. בועדה לא ישתתף אף זוג נשוי.

ב. מספר הגברים יהיה שווה למספר הנשים.

ג. מספר הגברים יהיה קטן ממש ממספר הנשים.

15) מצאו בכמה פונקציות $f : \{1, 2, 3, \dots, 3n-1, 3n\} \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, n-1, n\}$ מקיימות את התנאי הבא: לכל אבר בתמונה יש בדיוק 3 מקורות.

16) מה מספר הדרכים לפזר 50 כדורים אדומים ו-20 כדורים כחולים ל-10 תאים, כך שבכל תא מספר הכדורים האדומים יהיה לפחות כמספר הכדורים הכחולים?

17) בכמה דרכים ניתן לחלק קבוצה בגודל $2n$ לקבוצה בגודל n ולזוגות. (ניתן להניח כי n זוגי)

18) בכמה דרכים ניתן לסדר בשורה 8 פילים שונים, 2 שועלים זהים ושתי תרנגולות זהות, כך שהפילים מסודרים משמאל לימין על פי משקלם בסדר עולה, ואף שועל לא יהיה צמוד לתרנגולת?

19) בכמה דרכים ניתן לחלק 100 כדורים לבנים ו-50 כדורים צבעוניים (כל אחד בצבע שונה) ל-250 תאים באופן שיתקיימו שני התנאים הבאים: יהיה לפחות תא אחד שמכיל יותר מכדור לבן אחד, וכמו-כן יהיה לפחות תא אחד שמכיל יותר מכדור צבעוני אחד?

20) בכמה דרכים ניתן לסדר n גברים ו- n נשים במעגל כך שבני אותו מין לא ישבו זה לצד זה? כנ"ל לגבי שורה.

21) יש לבחור קבוצה של ששה ילדים מבין תלמידי כיתות א-1 ו-א-2, באופן ששלושה מהם יהיו מ-א-1 ושלושה מ-א-2. מספר הבנים בקבוצה צריך להיות שווה למספר הבנות בקבוצה (3 ו-3). ב-א-1 יש 10 בנים ו-15 בנות וב-א-2 יש 15 בנים ו-10 בנות. בכמה אופנים ניתן לבחור את הקבוצה?

22) בכמה קבוצות של n כדורים ב-10 צבעים יש לפחות כדור אחד מכל צבע?

(23) כמה פונקציות $f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ ($n \geq 1$) מקיימות את התנאי $f(k) \neq f(k+1)$ לכל $1 \leq k \leq n-1$?

(24) כמה פונקציות $f : \{1, 2, 3, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, n\}$ חז"ע ועל יש המקיימות $f(k) - k$ זוגי לכל

$$k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$$

(25) כמה סדרות בינריות באורך n יש המורכבות מ- k אחדים ו- $n-k$ אפסים שאין בהם שני אחדים רצופים?

(26) בכמה דרכים ניתן לחלק 60 כדורים צבעוניים (כל אחד בצבע שונה) ו-90 כדורים לבנים זהים ל-100 תאים כך שיתקיימו שני התנאים הבאים גם יחד. יהיה לפחות תא אחד שמכיל יותר מכדור צבעוני אחד וכמו כן בכל תא יהיו לכל היותר 50 כדורים לבנים.

(27) בכמה דרכים ניתן לחלק 4 בננות, 2 תפוזים, ו-4 תפוחים ל-10 אנשים כך שכל אחד יקבל בדיוק פרי אחד? שימו לב שפירות מאותו סוג נחשבים זהים.

(28) בכמה דרכים ניתן לבנות שורה מ- $k \geq 0$ כדורים לבנים זהים ו- $m \geq 0$ כדורים צבעוניים שונים. (ושונים מלבן)?

תרגילים בנושא זהויות קומבינטוריות והבינום של ניוטון

$$(1) \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k = 3^n \quad \text{הוכח אלגברית וקומבינטורית את הזהות}$$

$$(2) \quad 6^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{2n-k} \quad \text{הוכיחו לכל } n \geq 0 \text{ את הזהות}$$

$$(3) \quad 2^n = 3^n - n3^{n-1} + \binom{n}{2} 3^{n-2} - \dots + (-1)^k \binom{n}{k} 3^{n-k} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} 3^0 \quad \text{הוכח את השוויון הבא:}$$

$$(4) \quad \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{k} = 2^{2n} \quad \text{הוכיחו שלכל } n \text{ טבעי מתקיים:}$$

$$(5) \quad \binom{m+n}{2} = \binom{n}{2} + \binom{m}{2} + mn \quad \text{הוכח בדרך אלגברית ובדרך קומבינטורית את הזהות הבאה:}$$

$$(6) \quad \text{הוכח כי לכל } n \in \mathbb{N} \text{ המספר } \binom{2n}{n} \text{ הוא זוגי.}$$

$$(7) \quad \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} 2^{k-1} = \frac{n}{3} \cdot 3^n \quad \text{הוכח כי}$$

$$(8) \quad \forall x, y, n \in \mathbb{N}^+, \binom{x+y}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{x}{k} \binom{y}{n-k} \quad \text{הוכיחו כי:}$$

$$(9) \quad \sum_{k,j=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{j} \binom{n}{k+j} = \binom{3n}{n} \quad \text{הוכח את השוויון הבא}$$

$$(10) \quad \binom{r}{m} \binom{m}{k} = \binom{r}{k} \binom{r-k}{m-k} \quad \text{הוכח בדרך אלגברית ובדרך קומבינטורית את הזהות הבאה}$$

$$(11) \quad \binom{n}{k} + 2 \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k+2} = \binom{n+2}{k+2} \quad \text{הוכח כי לכל } 0 \leq n \text{ ולכל } 0 \leq k \leq n \text{ מתקיים}$$

$$(12) \quad (2n-1) \cdot (2n-3) \cdots 1 = \frac{\binom{2n}{2} \binom{2n-2}{2} \cdots \binom{2}{2}}{n!} \quad \text{הוכח אלגברית וקומבינטורית את הזהות הבאה}$$

$$(13) \quad \sum_{k=1}^n k(n-k) \binom{2n}{k} \binom{3n}{n-k} = 6n^2 \binom{5n-2}{n-2} \quad \text{הוכח את הזהות הבאה}$$

$$(14) \quad \sum_{n=0}^N \binom{k-1+n}{n} = \binom{k+N}{N} \quad \text{הוכיח את השוויון הבא}$$

$$(15) \quad 2^n > \binom{n}{\frac{n}{2}} \quad \text{הוכיחו, כי אם } n > 0 \text{ מספר זוגי אז}$$

16) כמה מבין המספרים בפיתוח הבינום $(\sqrt{2} + \sqrt[4]{7})^{80}$ הם שלמים?

17) הוכיחו כי לכל n טבעי מתקיים: $n^n - (n-1)^n = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} (n-1)^{n-i}$

תרגילים בנושא הכלה והדחה

- (1) כמה מילים באורך n יש מעל הא"ב $\{A, B, C, D\}$ כך שהאותיות A, B חייבות להופיע?
- (2) לארוחת ערב הוזמנו חמישה אנשים. המארח קנה 10 מתנות שונות. בכמה דרכים ניתן לחלק את המתנות בין האורחים כך שכל אורח יקבל לפחות פרס אחד?
- (3) בכמה דרכים יכול שירות בתי הסוהר לפזר 300 פליטים מאריתראה בחמישה תאי כלא כך שבשום תא לא יהיו יותר מ-100 פליטים? שימי לב: שירות בתי הסוהר לא מבדיל בין הפליטים השונים
- (4) בקייטנת ההשקעות הלא-הגיוניות יש חמישה קורסים. בכל אחד מחמשת הקורסים רשומים בדיוק 55 ילדים. לכל זוג קורסים יש בדיוק 44 ילדים שרשומים לשניהם. לכל שלושה מהקורסים יש בדיוק 33 ילדים שרשומים לשלושתם. לכל ארבעה מהקורסים יש בדיוק 22 ילדים שרשומים לארבעתם. הוכיחו כי יש לפחות ילד אחד שרשום לכל חמשת הקורסים בו זמנית.
- (5) א. בכמה מספרים קטנים ממליון סכום הספרות הוא 23 בדיוק? (שאלה זו מופיעה גם בפרק על פונקציות יוצרות)
 ב. בכמה מספרים קטנים ממליון סכום הספרות הוא 31 בדיוק?
 ג. בכמה מספרים קטנים ממליון סכום הספרות הוא 23 לכל היותר?
- (6) מטילים קוביה 8 פעמים ורושמים את התוצאות כסדרה של 8 מספרים. מה מספר האפשרויות לסדרות באורך 8 של הטלות, שבהן כל ששת המספרים מ-1 עד 6 יופיעו (כל מספר לפחות פעם אחת)?
- (7) במערכת שנה א של התוכנית למדעי המחשב באקדמיה המכללתית של תל-יפו-אביב יש חמישה קורסים. בכל אחד מחמשת הקורסים רשומים בדיוק 40 תלמידים. לכל זוג קורסים יש בדיוק 32 תלמידים שרשומים לשניהם. לכל שלושה מהקורסים יש בדיוק 24 תלמידים שרשומים לשלושתם. לכל ארבעה מהקורסים יש בדיוק 16 תלמידים שרשומים לארבעתם. הוכיחי שיש לפחות תלמיד אחד שרשום לכל חמשת הקורסים בו זמנית.
הדרכה: על סמך הנתונים כתבי ביטוי שמתאר כמה תלמידים יש בכל חמשת הקורסים יחד.
- (8) לארוחת ערב הוזמנו חמישה אנשים. המארח קנה 10 מתנות שונות. בכמה דרכים ניתן לחלק את המתנות בין האורחים כך שכל אורח יקבל לפחות פרס אחד?
- (9) איש ציבור מושחת לוקח כל שנה שוחד בסך 2, 4 או 6 מליון דולר (שלא כמו איש ציבור נורמטיבי בסעיף 1א, איש ציבור מושחת יכול לקחת שוחד של 6 מליון דולר מספר שנים ברציפות). סדרת שוחד היא סדרת סכומים שקיבל איש ציבור מושחת במשך כמה שנים, למשל 6,6,2,4,2. כמה סדרות שוחד יניבו עבור איש ציבור מושחת סך של 20 מליון דולר במשך 6 שנים?
- (10) כמה מילים באורך n יש מעל הא"ב $\{A, B, C, D\}$ כאשר A, B חייבות להופיע?
- (11) עבור $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ כמה פונקציות f חז"ע על ישנן $f : A \rightarrow A$ כך ש- $f(k) \neq k$ עבור $k = 1, 2, 3$

12) בכמה תמורות של המספרים $\{1,2,3,4,\dots,18\}$ כל המספרים שמתחלקים ב-3 במקומות של מספרים שמתחלקים בשלוש ואף זוגי לא במקומו?

13) ברשותך שלושה כדורים לבנים זהים, שלושה כדורים שחורים זהים, ומאגר בלתי מוגבל של כדורים אדומים זהים. בכמה אופנים ניתן להרכיב מהם קבוצה (סדר הכדורים לא משנה) בת n כדורים. פתור הן בעזרת פונקציות יוצרות והן בעזרת הכלה והדחה והשווה את התוצאות.

14) 7 משפחות בנות שלוש נפשות כל אחת (אבא, אמא וילד) מגיעות למפגש חברתי. בכמה אופנים ניתן לסדר אותם בשלוש כן ש-
א. ללא הגבלה?

- ב. כל שלשה תהיה מורכבת מאבא, אמא וילד אבל אף שלשה לא תרכיב משפחה שלמה?
ג. אף שלשה לא תרכיב משפחה שלמה (כלומר יתכן שלשה המורכבת משלושה אבות או שני אבות וילד)

15) בכמה דרכים ניתן לחלק 40 כדורים לארבעה תאים כך שאף תא לא יהיה ריק.
א. הכדורים זהים.
ב. הכדורים שונים.

16) ארבעה אנשים שונים (ששמותיהם 1,2,3,4) אחראים יחד על ביצוע של 5 משימות שונות (משימות א,ב,ג,ד,ה). לביצוע כל משימה נדרשים בדיוק שני אנשים. אין הבדל בין תפקידי שני האנשים בצוות המבצע משימה נתונה.
א. בכמה דרכים ניתן להקצות את 5 המשימות לצוותים של שני אנשים? הנה כמה דוגמאות לדרכים לגיטימיות לעשות זאת:
דוגמא 1: הצוות {1,2} יבצע את כל 5 המשימות!
דוגמא 2: הצוות {1,2} יבצע את משימות א,ב, הצוות {1,3} את משימות ג,ד והצוות {2,3} את משימה ה.
דוגמא 3: הצוות {1,2} יבצע את משימות א,ב, הצוות {3,4} את משימות ג,ד והצוות {2,3} את משימה ה.
ב. בכמה דרכים ניתן להקצות את 5 המשימות לצוותים של שני אנשים, אם אסור שמישהו יתחמק לגמרי מעבודה: כל אחד מ-4 האנשים חייב לקחת חלק במשימה אחת לפחות (דוגמאות 1, 2 בסעיף א אינן חוקיות כעת. דוגמא 3 - חוקית).

17) דנה, תלמידה בכיתה א', קראה בספר את המשפט המעניין: **דנה קמה דנה נמה**. אחרי שקראה בהצלחה את המשפט, עלו בדעתה של דנה כמה שאלות מעניינות לא פחות:

- א. בכמה דרכים אפשר לסדר את כל 12 האותיות שבמשפט הזה במחרוזת אחת ללא רווחים, כגון **דנהקמהדנהנמה**.
ב. בכמה מהדרכים הללו מופיע בתוך המחרוזת הרצף **דמקה**?
ג. מה מספר הדרכים לסדר את 12 האותיות כך **שלא** תופיע בתוך המחרוזת **אף אחת** מארבע המחרוזות הבאות: **דמקה**, **קהה**, **ממד**, **נננה**

(18) בבחינה מתמטיקה בדידה בקורס זה יש 11 שאלות בארבעה נושאים כדלהלן: 2 שאלות בקומבינטוריקה בסיסית, 3 שאלות בפונקציות יוצרות, 2 שאלות בגרפים ו-4 שאלות בהכלה והדחה. צריך לענות על 6 שאלות לפחות (אפשר יותר) וחייבים לענות על לפחות שאלה אחת מכל נושא. בכמה אופנים ניתן לעשות זאת.

(19) בכמה דרכים ניתן להרכיב מילה מהמספרים $\{1,2,3,\dots,n\}$ כך שכל מספר יופיע k פעמים אל אף מספר לא יופיע k פעמים ברצף?

תרגילים בנושא רקורסיה

(1) לכל n שלם אי-שלילי נגדיר את a_n להיות מספר הסדרות היורדות הלא ריקות, שמורכבות ממספרים טבעיים בין 1 ל n , כך שההפרש בין כל שני מספרים עוקבים בסדרה הוא לפחות 3. כתבו נוסחת נסיגה ותנאי התחלה ל a_n .

דוגמאות:

- הסדרה (1,5,9,12) נספרת בחישוב של a_{14} , מכיוון שהיא יורדת, כל הספרות שבה הן בין 1 ל 14, וההפרשים בין כל שתי ספרות עוקבות בסדרה הם 3 או יותר.
- הסדרה (14) נספרת בחישוב של a_{14} , מכיוון שהיא יורדת, כל הספרות שבה הן בין 1 ל 14, וההפרשים בין כל שתי ספרות עוקבות בסדרה הם 3 או יותר (בגלל שאין ספרות עוקבות).
- הסדרה (1,7,9,12) אינה נספרת בחישוב של a_{14} , מכיוון שההפרש בין הספרה השנייה והשלישית בסדרה הוא 2.

(2) א) מצא נוסחת נסיגה ותנאי התחלה עבור מספר האפשרויות לחלק קבוצה בת n אנשים לזוגות ולבודדים.

ב) מצאי נוסחת נסיגה ותנאי התחלה למספר הדרכים לחלק קבוצה של n אנשים לזוגות ולשלשות, כאשר הסדר בין הזוגות והשלשות ובתוך הזוגות והשלשות איננו משנה.

(3) בחפיסת קלפי טאקי יש מספר לא מוגבל של קלפים בצבעים צהוב, אדום, כחול וירוק, ואיננו מבחינים בין קלפים שונים מאותו צבע. יהי a_n מספר ערימות קלפי טאקי בגודל n שבהם מעל קלף אדום או כחול אסור לשים קלף צהוב או ירוק. מצאי נוסחת נסיגה ותנאי התחלה ל a_n .

(4) מצא יחס רקורסיבי ותנאי התחלה עבור מספר המילים באורך n מעל $\{A,B,C\}$ ללא הרצפים הבאים. (כל סעיף שאלה בפני עצמה)

א) CC ב) AB ג) AA, AB ד) AA, BA ה) AA, AB, AC ו) AB, BC באתר מצורף פתרון בשתי דרכים ז) BA, CA ח) AA, BB ט) AA, BB, CC י) BC, CB

(5) מצא יחס רקורסיבי ותנאי התחלה עבור מספר הדרכים לרצף שביל באורך n במרצפות אדומות באורך 2, מרצפות צהובות באורך 2 מרצפות ירוקות באורך 2, ומרצפות שחורות ומרצפות לבנות באורך 1 כל אחת. ולאחר פתור את יחס הנסיגה שקיבלת, קבל נוסחה מפורשת, וחשב את ארבעת האיברים הראשונים בשתי דרכים. אחת לפי היחס הרקורסיבי ושתיים ע"י הצבה בנוסחה המפורשת שמצאת.

(6) עבור n טבעי מהו מספר הסדרות הפלינדרומיות באורך n מעל קבוצת הספרות העשרוניות $\{0,1,2,\dots,9\}$ (סידרה x_1, \dots, x_n היא פלינדרומית אם $x_i = x_{n-i+1}$ לכל $1 \leq i \leq n$ ובעברית יותר קלה אם בקריאתה מהסוף להתחלה או מההתחלה לסוף מתקבלת אותה סדרה למשל כמו $(1,7,2,2,2,7,1)$).

(7) נתבונן בסדרות סופיות של סימנים, הלקוחים מתוך 6 סימנים אלה: הספרות 0,1 וארבעה סימני פעולה: +, -, *, /. ובכפוף לתנאים הבאים:

א. הסדרה נפתחת ומסתיימת בספרה.

ב. אין הופעות צמודות של סימני פעולה.

דוגמאות של סדרות העונות על התנאים: $0100/101 - 11 + 1010$, 001

דוגמאות של סדרות שאינן עונות על התנאים: -00 , $+00+10$, $.101+/00$

נסמן ב- a_n את מספר הסדרות הללו שבהן בדיוק n סימנים.

(א) מצא יחס נסיגה עבור a_n .

(ב) מצא אופן ישיר את a_0, a_1, a_2, a_3 . בדוק בעזרת הערכים שקיבלת את יחס הנסיגה שרשמת.

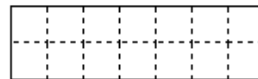
(ג) פתור את יחס הנסיגה וקבל נוסחה מפורשת עבור a_n . ובדוק בעזרת הנוסחה הנ"ל את תוצאות סעיף ב'.

(8) בדינו מספר בלתי-מוגבל של בלוקים זהים בגודל 2×1 :

ומספר בלתי-מוגבל של בלוקים זהים בגודל 2×2 :



עלינו לרצף מלבן שממדיו $n \times 2$ (בציור $n = 7$).



אסור לחרוג מגבולות המלבן. בלוק של 2×1 אפשר להניח כרצוננו "שוכב" או "עומד". יהי a_n מספר הריצופים השונים האפשריים.

א. רשום יחס נסיגה עבור a_n (הסבר אותו) ותנאי התחלה מספיקים.

ב. פתור את יחס הנסיגה.

ג. חשב את a_4 בשתי דרכים: מתוך יחס הנסיגה שבסעיף א'.

(9) תנו ביטוי מפורש ל- a_n בנוסחאות הנסיגה הבאות וחשבו את a_3, a_4, a_5 בשתי דרכים, אחת בעזרת יחס הנסיגה ושתיים בעזרת הנוסחה המפורשת.

כאשר $a_0 = 3, a_1 = 7$

$$(א) a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$$

כאשר $a_0 = 1, a_1 = 1$

$$(ב) a_{n+1} = 5a_n - 4a_{n-1}$$

כאשר $a_0 = -1, a_1 = 4$

$$(ג) a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$$

כאשר $a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = 7$

$$(ד) a_{n+1} = 7a_{n-1} + 6a_{n-2}$$

כאשר $a_0 = 1, a_1 = 4, a_2 = 11$

$$(ה) a_{n+1} = 4a_n - 5a_{n-1} + 2a_{n-2}$$

כאשר $a_1 = 19, a_0 = 14$

$$(ו) a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2} + 16n$$

כאשר $a_0 = 1, a_1 = 9$

$$(ז) a_n = 6a_{n-1} - 8a_{n-2} - 3$$

כאשר $a_0 = 1, a_1 = 9$

$$(ח) a_n = 6a_{n-1} - 8a_{n-2} - 3^n$$

כאשר $a_0 = 1, a_1 = 10$

$$(ט) a_n = 6a_{n-1} - 8a_{n-2} - 2^n$$

כאשר $a_0 = -1, a_1 = 7\frac{1}{2}$

$$(י) a_n = 10a_{n-1} - 25a_{n-2} + 5^n$$

כאשר $a_0 = 1, a_1 = 2$

$$(יא) a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + 2^n + n$$

לפתרון מלא בסרטון וידאו היכנסו ל- www.GooL.co.il

כתב ופתר - טל פלדמן ©

שיעורים פרטיים לבוחדים ולקבוצות 054-7599493

(10) מצא נוסחת נסיגה ותנאי התחלה עבור הסידרה a_n המקיימת: $a_n = 2^{2n+1} - 3^n(n-1) + 1$.

(11) כתוב נוסחת נסיגה, a_n , למספר הסדרות באורך n בספרות 0,1,2 ללא 00 ו-12.

(12) איש ציבור נורמטיבי לוקח שוחד כל שנה בסכום 2 מיליון דולר, 4 מיליון דולר או 6 מיליון דולר. כדי לא למשוך תשומת לב הוא לא לוקח שנתיים ברצף שוחד על סך 6 מיליון דולר. נסמן ב a_n את מספר סדרות השוחד השונות שיכול לצבור איש ציבור בשירות נורמטיבי בן n שנים.

דוגמה: במשך 4 שנים ניתן לצבור את סדרת השוחד 2,2,2,2; את סדרת השוחד 2,4,2,6; את סדרת השוחד 4,2,2,6; ועוד כהנה וכהנה. שימי לב ששתי הסדרות האחרונות נספרות כשתי סדרות שוחד שונות. רשמי נוסחת נסיגה ותנאי התחלה ל a_n .

(13) לכל $n \in \mathbb{N}$ נסמן ע"י a_n את מספר המילים מעל $\{A, B, C, D, E\}$ שלא מכילות אף אחד מהרצפים AA, BA, CA .

מצא נוסחה מפורשת עבור a_n .

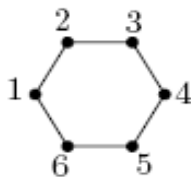
(14) יהי a_n מספר הסדרות באורך n , שאבריהן שייכים לקבוצה $\{1, 2, 3, \dots, 8\}$ ומקיימות את התנאי

הבא: לא מופיעים בסדרה מספרים זוגיים זה בסמוך לזה.

(א) מצאו יחס נסיגה עבור a_n , רשמו את a_0, a_1 .

(ב) פתרו את יחס הנסיגה וקבלו ביטוי מפורש עבור a_n .

(ג) חשבו את a_2 מנוסחת הרקורסיה ומהביטוי המפורש, ובדקו שהתקבל אותו ערך.



(15) לקינוח שאלה קשה.

כמה טיולים באורך n המתחילים בקודקוד 1 ומסתיימים בקודקוד 1 יש בגרף

לדוגמה עבור $n = 2$ יש שני טיולים כאלה והם 1,2,1 ו-1,6,1

לדוגמה עבור $n = 4$ יש שישה טיולים כאלה והם

$(1, 2, 1, 2, 1), (1, 2, 3, 2, 1), (1, 6, 1, 6, 1), (1, 6, 1, 2, 1), (1, 6, 1, 6, 1), (1, 6, 5, 6, 1)$

תרגילים בנושא שובך היונים

- (1) תהי $A = \{1, 2, 3, \dots, 49\}$ הוכח כי לכל בחירה של קבוצה $B \subseteq A$ כך ש- $|B| = 26$ יהיו ב- B לפחות שני איברים שסכומם 49.
- (2) תהי A קבוצה של שישה מספרים מתוך $\{1, \dots, 11\}$ הוכח כי קיימות שתי תתי קבוצות של A שסכום אבריהן שווה.
- (3) מה הגודל המירבי של קבוצה של מספרים טבעיים שבה אין שני מספרים שסכומם או הפרשם מתחלק ב-3009? נמקו!!!
- (4) תהי A קבוצה של n מספרים טבעיים כלשהם. הוכח שקיימת קבוצה חלקית לא-ריקה של A , שסכום איבריה מתחלק ב- n .
- (5) הוכח כי בכל צביעה של המישור בשני צבעים כחול ואדום יש שתי נקודות שמרחקן, אחד והן צבועות באותו צבע.
- (6) יהי $n \in \mathbb{N}$ הוכח כי קיים $k \in \mathbb{N}$ כך שבמספר הטבעי $k \cdot n$ מופיעות הספרות 7 ו-0 בלבד.
- (7) הוכח כי מבין כל 12 מספרים דו ספרתיים יש שניים שהפרשם בעל שתי ספרות זהות.
- (8) הוכח כי מבין כל בחירת 26 נקודות בתוך משולש שווה צלעות שאורך צלעו הוא אחד יש שתי נקודות שהמרחק ביניהן קטן מ- $\frac{1}{5}$.
- (9) הוכח כי בכל בחירה של $n + 1$ מספרים מתוך הקבוצה $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ יש שני מספרים x, y כך ש-
 א. x, y זרים. (כלומר המחלק המשותף המקסימלי שלהם הוא 1.)
 ב. x מתחלק ב- y ללא שארית.
 ג. הראה כי החסם הנ"ל הדוק, כלומר אפשר לבחור n מספרים מבלי שיתקיימו תנאי א' ו-ב'.
- (10) בוחרים 46 מספרים מתוך הקבוצה $\{1, 2, 3, \dots, 81\}$ הוכח כי יש שני מספרים שהפרשם הוא בדיוק 9.
 הוכח גם כי המספר הנ"ל הדוק. (כלומר מצא 45 מספרים מתוך $\{1, 2, 3, \dots, 81\}$ שאין בהם שניים שהפרשם הוא בדיוק 9.)
- (11) תהי A קבוצה בת 20 מספרים שנבחרו במתוך הסדרה החשבונית $1, 4, 7, 10, \dots, 100$ הוכח כי יש שני מספרים שסכומם 104.
- (12) n אנשים נפגשו במסיבה ולחצו ידיים. הוכח כי יש שני אנשים שלחצו בדיוק אותו מספר ידיים.
- (13) הוכח כי בכל צביעה של קשתות הגרף השלם K_6 בשני צבעים יש משולש מונוכרומטי.
- (14) הוכח כי בכל גרף יש שני קודקודים בעלי אותה דרגה.
- (15) לפוליטיקאי נותרו 50 ימים עד לבחירות. הוא מתכנן נאומי בחירות. לפחות אח ביום אך לא יותר מ-75 נאומים בס"ה. הוכח כי קיימת סדרת ימים שבהם הוא נואם בס"ה 24 מאומים.
- (16) יהי $n \in \mathbb{N}$ הוכח כי קיים $m \in \mathbb{N}$ כך ש- n מחלק את $2^m - 1$. הדרכה: התבונן ב- $2^1 - 1, 2^2 - 1, 2^3 - 1, \dots, 2^{n+1} - 1$.

תרגילים בנושא גרפים

הערה: השאלות באדום אינן מיועדות ללומדים במכללת אפקה.

- (1) יהי G גרף פשוט בעל n קודקודים. הוכח כי אם לכל שני קודקודים $x, y \in V$ מתקיים $d(x) + d(y) \geq n - 1$ אז G קשיר.
- (2) יהי G גרף פשוט בעל $n = 100$ קודקודים הוכח כי אם לכל קודקוד $x \in V$ מתקיים $d(x) \geq 50$ אז יש ב- G מעגל באורך 4.
- (3) הוכח כי בכל גרף פשוט על 100 קודקודים שבו כל הדרגות הן לפחות 10 יש מעגל באורך ≥ 4 .
- (4) יהי G גרף דו צדדי $V = V_1 \cup V_2, V_1 \cap V_2 = \emptyset$ נתון כי G הוא d רגולרי. $d \geq 1$, הוכח כי $|V_1| = |V_2|$.
- (5) יהי G גרף פשוט הוכח כי לפחות אחד מבין הגרפים G, \bar{G} הוא קשיר. ובניסוח שקול: הוכח כי בכל צביעת קשתות הגרף השלם K_n בשני צבעים לפחות אחד הגרפים החד צבעיים הוא קשיר.
- (6) יהי G גרף פשוט בעל n קודקודים. הוכח כי אם $|E| > \binom{n-1}{2}$ (★) אז G קשיר. כאשר $|E|$ זה מספר הקשתות.
- הראה כי חסם זה הדוק. כלומר הראה גרף פשוט G עבורו $|E| = \binom{n-1}{2}$ כך ש- G אינו קשיר. זה מראה שלא ניתן לשפר את אי השוויון (★).
- (7) יהי T עץ בעל n קודקודים. נתון כי דרגותיו הן 1, 3, 5 בלבד. יש 7 קודקודים מדרגה 3 ו-10 מדרגה 5. כמה עליים יש בעץ?
- (8) יהי $T = (V, E)$ עץ שבו: $|V| = n$. דרגות צמתי T הן: 1, 3, 5 בלבד. מס' הצמתים שלהם דרגה 3 הוא 10 ומס' הצמתים שלהם דרגה 5 הוא 12. כמה עליים (צמתים מדרגה 1) יש לעץ?
- (9) יהיו $T_1 = (V, E_1), T_2 = (V, E_2)$ שני עצים על אותה קבוצת קודקודים. נגדיר גרף G על אותה קבוצת קודקודים וקשתותיו $E = E_1 \cup E_2$ הוכח כי קיים $x \in V$ כך ש- $d(x) \leq 3$ (דרגתו של x ב- G).
- (10) צובעים ב- $n \geq 2$ צבעים את קשתות הגרף השלם K_n כך שכל צבע מופיע לפחות פעם אחת הוכח כי קיים מעגל שכל קשתותיו צבועות בצבעים שונים.
- (11) הוכיחו בכל גרף שכל דרגותיו 4 ניתן לצבוע את קשתותיו כך מכל קודקוד יצאו בדיוק שתי קשתות מכל צבע.
- (12) יהי $G = (V, E)$ גרף פשוט הוכח כי אם $|V| = |E|$ אז ב- G יש מעגל ואם G קשיר אז המעגל יחיד.
- (13) יהי $G = (V, E)$ גרף פשוט ויהיו $x, y \in V$ שני קודקודים לא שכנים הוכח כי אם $d(x) + d(y) \geq n$ אז יש ל- x ול- y לפחות שני שכנים משותפים.
- (14) הוכח כי בכל צביעת קשתות הגרף השלם K_n בשני צבעים קיים עץ פורש מונוכרומטי.
- הערה: עץ פורש הוא עץ שקודקודיו הם כל קודקודי G וקשתותיו הן חלק מקשתות G .
- (15) יהי $G = (V, E), |V| = n$, גרף פשוט וחסר מעגלים שבו k רכיבי קשירות, הוכיחו כי: $|E| = n - k$.
- (16) מהי העוצמה הגדולה ביותר האפשרית לקבוצה של עצים על קבוצת הקודקודים: $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ שאף שניים מהם אינם איזומורפיים?

(17) יהי G גרף פשוט על $n \geq 2$ צמתים ויהיו $u, v \in V$ קודקודים שאינם שכנים. הוכח כי אם $d(u), d(v) \geq \frac{n+1}{2}$ אז יש ל- u, v לפחות שלושה שכנים משותפים.

(18) בכמה עצים על קבוצת הצמתים $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ אין שום צומת מדרגה זוגית?

(19) יהי $K_{m,n}$ גרף דו צדדי שלם. הוכח כי $K_{m,n}$ המילטוני $m = n \Leftrightarrow$.

(20) יהיו $G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_2, E_2)$ שני גרפים אוילריים פשוטים. נגדיר $G = (V, E)$ באופן הבא: $V = V_1 \cup V_2, E = E_1 \cup E_2$ ומלכדים צומת $u_1 \in V_1$ עם צומת $u_2 \in V_2$. האם G אוילרי? ואם נחבר את u_1 עם u_2 במקום ללכד אותם האם כעת G אוילרי?

(21) יהיו G_1, G_2 שני גרפים איזומורפיים. הוכח כי G_1 חסר מעגלים $\Leftrightarrow G_2$ חסר מעגלים. הסק כי G_1 עץ $\Leftrightarrow G_2$ עץ.

(22) הוכח כי בכל צביעה של קשתות K_{2t+1} ב- t צבעים נקבל מעגל חד צבעי.

(23) יהי $T = (V, E)$ עץ. הוכיחו שאם כל דרגותיו אי-זוגיות אזי גם $|E|$ הוא מספר אי-זוגי.

(24) יהי $G = (V, E)$ גרף דו-צדדי פשוט. $|V| = n$. הוכיחו כי: $|E| \leq \frac{n^2}{4}$.

(25) יהי $G = (V, E)$ גרף כך ש- $V = P_2(\{1, 2, \dots, n\}), (n \geq 2)$

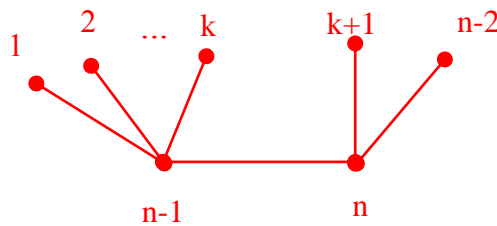
$$e \in E \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset, \quad A, B \in V$$

(i) חשבו את $|V|$.

(ii) מהי דרגת כל צומת?

(iii) הוכיחו כי אם $n \geq 5$ אזי G קשיר (רמז: דרך השלילה).

(26) כמה גרפים שונים על קבוצת הקודקודים $V = \{1, 2, \dots, n\}$ איזומורפיים לגרף הבא:



תנו תשובה לכל k, n טבעיים המקיימים $2 \leq k \leq n-3$ הפרידו בין המקרים $n = 2k + 2$, $n \neq 2k + 2$.

(27) מהו האורך המירבי של מסלול ב- K_{2n+1} ? נמקו.

(28) נתונים שלושה גרפים בעלי אותה קבוצת קודקודים: $G_1 = (V, E_1)$, $G_2 = (V, E_2)$ ו- $G_3 = (V, E_3)$. נגדיר:

$G = (V, E_1 \cup E_2 \cup E_3)$ איחוד שלושת הגרפים, ונניח כי לכל קודקוד ב- V דרגתו ב- G היא לפחות 6. הוכיחו כי לפחות אחד

מהגרפים G_1, G_2, G_3 אינו חסר-מעגלים.

(29) יהי T עץ על $n \geq 3$ קודקודים ויהי v קודקוד ב- T מדרגה 2. יהי k מספר רכיבי הקשירות של $T - v$ (שהוא תת הגרף של T המתקבל

ממחיקת v והקשתות ש- v קצה שלהן). מה הם הערכים האפשריים עבור k ? הוכיחו טענתכם

(30) יהי G גרף פשוט על 10 קודקודים שיש בו 41 קשתות. הוכיחו: (i) יש לפחות שני קודקודים ב- G שדרגתם היא 9. (ii) G קשיר.

(31) כמה מעגלים פשוטים באורך $3 \leq k \leq n$ יש בגרף השלם K_n על קבוצת הקודקודים $\{1, 2, 3, 4, \dots, n\}$? שני מעגלים המתקבלים

אחד מין השני ע"י סיבוב נחשבים זהים. למשל עבור $n = 5$ שני המעגלים הבאים $1, 2, 3, 4, 5, 1$ ו- $3, 4, 5, 1, 2, 3$ נחשבים זהים

ואילו המעגלים $1, 2, 3, 1$ ו- $1, 3, 2, 1$ אינם זהים.

(32) יהי G_n גרף פשוט שקודקודיו הם כל התת קבוצות של $\{1, 2, 3, 4, \dots, n\}$ למעט \emptyset ו- $\{1, 2, 3, 4, \dots, n\}$ עצמה. שני קודקודים

הם שכנים אם ורק אם אף אחד אינו מוכל במשנהו.

a. הוכח כי לכל $n \geq 2$ G_n קשיר.

b. הוכח כי אם v תת קבוצה בת k אברים של $\{1, 2, 3, 4, \dots, n\}$ אז דרגתה כקודקוד ב- G_n היא $2^n - 2^{n-k} - 2^k + 1$.

c. הוכח כי לכל $n \geq 3$ קיים מעגל המילטון ב- G_n . מותר להסתמך על סעיפים קודמים ועל העובדה ש- $2^{n-1} + 2^k \leq 2^{n-k} + 2^k$.

(33) בכמה עצים על קבוצת הקודקודים $\{1, 2, 3, 4, \dots, 10\}$ כל העלים הם מספרים זוגיים?

(34) מיהו העץ הממוספר המותאם למילה: $((1, 1, 3, 4, 3, 6, 10, 1))$?

(35) יהיו $T_1 = \langle V_1, E_1 \rangle$, $T_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$ עצים.

נגדיר גרף G באופן הבא: $G = \langle V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \rangle$

d. נתון כי: $V_1 \cap V_2 = \{v\}$. האם G בהכרח עץ? נמקו.

e. נתון כי: $E_1 \cap E_2 = \{e\}$. האם G בהכרח עץ? נמקו.

f. יהי $T = (V, E)$ עץ שדרגות כל צמתיו אי-זוגיות. הוכיחו כי $|E|$ הוא מספר אי-זוגי.

(36) יהי T עץ על $n \geq 4$ קודקודים. אורך המסלול הפשוט הארוך ביותר ב- T הוא $n - 2$ (יש מסלול פשוט באורך $n - 2$ ואין מסלול

ארוך יותר). מהן דרגות קודקודי T ? רשמו אותן בסדר עולה משמאל לימין (סדרת הדרגות). יהי G גרף פשוט 3-רגולארי על

$n \geq 4$ קודקודים. נתון שב- G יש מעגל המילטון. הוכיחו שתת הגרף של G המתקבל ממחיקת כל הקשתות ששייכות למעגל

המילטון הוא בעל $\frac{n}{2}$ רכיבי קשירות (בפרט, עליכם להוכיח ש- n זוגי!).

(37) יהי G גרף בעל שני רכיבי קשירות, T_1 ו- T_2 , שכל אחד מהם עץ. מוסיפים שתי קשתות חדשות ל- G (קבוצת הקודקודים נשארת

ללא שינוי) ומתקבל גרף חדש \tilde{G} .

(i) הוכיחו שב- \tilde{G} בהכרח יש מעגל

(ii) בנו דוגמה שבה ב- \tilde{G} יש מעגל המילטון

(39) נתונה קבוצה של 10 קודקודים, ואוסף שקפים שעליהם מצוירים עצים על אותם עשרה קודקודים. גיורא מניח מספר כלשהו של

שקפים זה על זה, ומקפיד שאף קשת משקף אחד לא תכסה על אותה קשת בשקף אחר (כלומר אין אף קשת משותפת לשני עצים

שונים). הוכיחו שהגרף שגיורא מקבל מאיחוד העצים שמצוירים על השקפים לא יכול להיות גרף שכל דרגותיו שוות ל-5.

רמז: חשבו את מספר הקשתות בגרף.

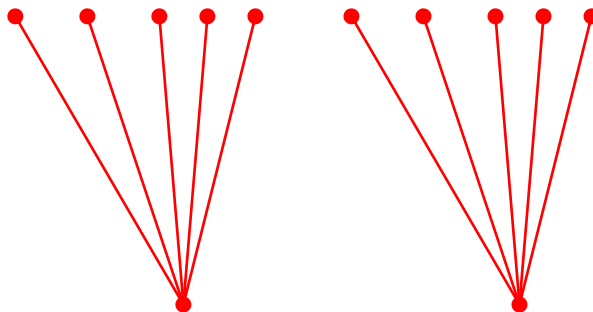
(40) יהי G גרף פשוט על $n \geq 3$ קודקודים. נתון: (i) n מספר זוגי. (ii) כל הדרגות ב- G שוות (כלומר G גרף רגולרי). (iii) גם G וגם

\bar{G} קשירים. הוכיחו שלפחות באחד מבין G ו- \bar{G} יש מעגל המילטון.

(41) מחקו $n - 1$ קשתות מן הגרף הדו-צדדי השלם $K_{2,n}$ ($n \geq 1$) והתקבל גרף G שאין בו קודקודים מבודדים (כלומר אין בו קודקודים

שדרגתם אפס). הוכיחו ש- G הוא עץ.

(42) כמה גרפים שונים על קבוצת הקודקודים $V = \{v_1, v_2, \dots, v_{12}\}$ איזומורפים לגרף הבא:



(43) יהיו $G_1 = (V, E_1)$, $G_2 = (V, E_2)$ שני גרפים על אותה קבוצת קודקודים V . מגדירים את הגרף $G = (V, E_1 \oplus E_2)$ כאשר $E_1 \oplus E_2$ הוא ההפרש הסימטרי של שתי קבוצות הקשתות. (כל הקשתות שנמצאות ב- E_1 או ב- E_2 אבל לא בשניהן) הוכח כי אם ב- G_1, G_2 יש מעגל אוילר ואם G קשיר אז גם בו יש מעגל אוילר.

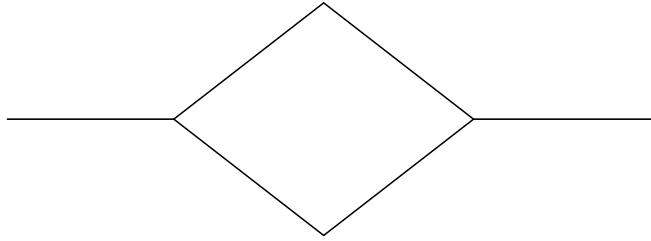
(44) יהי G גרף שקודקודיו הן תתי קבוצות בנות 4 איברים של $\{1, 2, 3, \dots, 8\}$ כאשר שני קודקודים הם מחוברים אם ורק אם בחיתוך שתי הקבוצות יש 2 איברים בדיוק. האם ב- G יש מעגל המילטון?

(45) הוכיחי, או תני דוגמה נגדית והסבירי מדוע היא דוגמה נגדית: אם לשני גרפים אותה רשימת דרגות (כלומר אם נסדר את דרגות קודקודי כל אחד מהגרפים בסדר עולה, נקבל אותה סדרה), אז הגרפים איזומורפיים.

(46) יהי G גרף, לאו דווקא קשיר, שכל דרגותיו איזוגיות. נבנה גרף H שקודקודיו הם קודקודי G ועוד קודקוד חדש v , וקשתותיו הם קשתות G וכל הקשתות האפשריות בין v לקודקודי G . הוכיחי שב- H יש מעגל אוילר.

(47) יהי G גרף קשיר על 13 קודקודים, שניתן לצבוע בשלושה צבעים (כלומר אפשר לצבוע את הקודקודים בשלושה צבעים, כך שאין שני קודקודים מאותו צבע שמחוברים בקשת). הוכיחי שיש בגרף 5 קודקודים שאף אחד מהם לא מחובר לאף אחד אחר.

(48) כמה גרפים שונים זה מזה ואיזומורפיים לגרף שמצויר להלן, אפשר לבנות על קבוצת הקודקודים $\{a, b, c, d, e, f\}$?



(49) כמה עצים יש על הקודקודים $\{1, \dots, n\}$ שלהם בדיוק שני עלים?

(50) הוכח כי בכל צביעת קשתות הגרף השלם K_6 בשני צבעים יש משולש מונוכרומטי.

(51) הוכיחו כי בכל קבוצה של 9 אנשים יש בהכרח לפחות 4 המכירים זה את זה או לפחות 3 שאף שניים מהם אינם מכירים זה את זה.

(52) יהי G גרף שקודקודיו הם תתי קבוצות בנות 4 אברים של הקבוצה $\{1, 2, \dots, n\}$ (n גדול מ-6). שני קודקודים מחוברים בקשת בגרף אם בחיתוך שלהם יש שני אברים בדיוק. לדוגמה, הקודקוד $\{1, 2, 3, 4\}$ שכן של $\{1, 2, 7, 8\}$ אך לא של $\{1, 2, 3, 7\}$. כמה קודקודים בגרף סה"כ הם שכנים של $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{1, 2, 3, 5\}$ או $\{1, 2, 4, 5\}$?

(53) יהי T עץ. נוסיף ל- T קודקוד שנקרא לו v , וקשתות מ- v לחלק מקודקודי T . מה צריכה להיות דרגת v כדי שבגרף המתקבל יהיה בדיוק מעגל פשוט אחד? הוכיחי שאם דרגת v תהיה גדולה יותר, בגרף יהיה יותר ממעגל פשוט אחד.

(54) הוכיחי את הטענה הבאה, או תני דוגמה נגדית והסבר שמראה שאכן מדובר בדוגמה נגדית: אם בגרף יש מעגל המילטון, אז יש בו מעגל אוילר.

55) G גרף עם 20 קודקודים ו-15 קשתות ללא מעגלים. כמה רכיבי קשירות בגרף?

56) יהי G גרף פשוט קשיר בן 7 קודקודים שסדרת דרגותיו היא $3, 2, 2, 2, 1, 1, 1$. כמה מעגלים פשוטים יש בגרף?

57) יהי T עץ על $n \geq 2$ קודקודים שלו בדיוק שני עלים. מהן דרגות קודקודי T ? רשמו אותן, לכל $n \geq 2$, בסדר עולה משמאל לימין (סדרת הדרגות) והוכיחו נכונות תשובתכם.

58) יהי G גרף פשוט על n קודקודים המכיל מעגל המילטון. נתון כי על ידי השמטת קשתות המעגל מתקבל תת גרף של G שהוא עץ. האם ניתן על סמך הנתונים לקבוע כמה קשתות בגרף G ? אם כן מהו מספר הקשתות?

59) נתונים שני גרפים G_1, G_2 על 5 קודקודים סדרת דרגותיו של G_1 היא: $2, 2, 3, 4, 5, 5, 6$

וסדרת דרגותיו של G_2 היא: $1, 2, 3, 4, 4$ לגבי כל אחד משני הגרפים קבע איזו מן הטענות הבאות נכונה.

א. יש גרף פשוט וקשיר כזה.

ב. יש גרף קשיר כזה אבל הוא לא פשוט.

ג. יש גרף פשוט כזה אבל הוא לא קשיר.

ד. יש גרף כזה אבל הוא חייב להיות לא פשוט ולא קשיר.

ה. לא קיים גרף כזה.

60) עבור $n \in \mathbb{N}$ נגדיר גרף פשוט G_n באופן הבא: צמתיו הם 2^n הסדרות הבניאריות באורך n . ושני קודקודים מחוברים ביניהם

בקשת אם ורק אם הם נבדלים בקורדינטה אחת. מה מספר הקשתות של G_5 ? של G_n ?

61) נגדיר C_n להיות מעגל על n קודקודים. לאלו ערכים של n מתקיים ש- C_n איזומורפי ל- \bar{C}_n ?

כאשר \bar{C}_n הוא הגרף המשלים.

62) נגדיר גרף G באופן הבא: $V = \{A \in P(\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}) \mid |A| = 3\}$ למשל $v = \{2, 5, 6\}$ היא צומת של G שכן זו

תת קבוצה של $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ בת שלושה איברים. כמו כן נגדיר את קבוצת קשתות G באופן הבא:

$$|A \cap B| = 1 \Leftrightarrow \{A, B\} \in E$$

א. הוכח כי G קשיר וחשב את מספר קודקודיו.

ב. חשב את דרגת כל צומת ואת מספר קשתותיו.

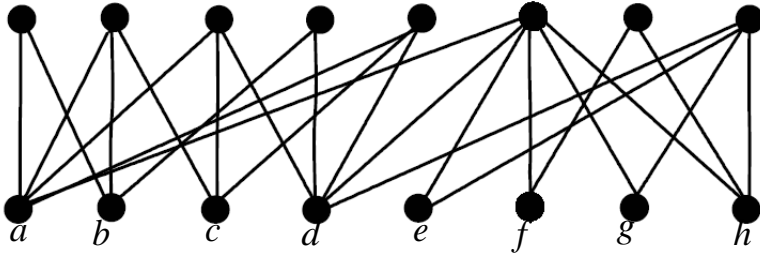
ג. האם G אוילרי? המילטוני?

1 2 3 4 5 6 7 8

לפתרון מלא בסרטון וידאו היכנסו ל- www.GooL.co.il

כתב ופתר - טל פלדמן ©

שיעורים פרטיים לבוחדים ולקבוצות 054-7599493



63) א. הוכח כי בגרף הבא אין זוג מושלם?

ב. מצא זוג מקסימום.

ג. מהו המספר המינימלי של קשתות

שיש להוסיף לגרף כך שיהיה זוג

מושלם

64) יהי G גרף מישורי על 11 קודקודים. הוכח כי \bar{G} אינו מישורי.

65) יהי G גרף מישורי על n קודקודים. הוכח כי אם $n \geq 11$ אז \bar{G} אינו מישורי.

66) יהי $G = (V, E)$ גרף ותהינה A, B קבוצות צבעים. נסמן את הגרף המשלים ב- $\bar{G} = (V, \bar{E})$.

תהינה $f: V \rightarrow A, g: V \rightarrow B$ שתי צביעות חוקיות של G ושל \bar{G} בהתאמה.

הערה: כזכור צביעת קודקודים היא פונקציה המתאימה לכל קודקוד צבע.

נגדיר $h: V \rightarrow A \times B$ באופן הבא: $h(v) = \langle f(v), g(v) \rangle$ כלומר h מתאימה לכל $v \in V$ זוג סדור של צבעים.

הימני בזוג הוא הצבע של v לפי הצביעה החוקית של G והשמאלי בזוג הוא הצבע של v לפי הצביעה החוקית של \bar{G} . הוכח

כי אין שני קודקודים שמותאם להם אותו זוג סדור של צבעים והסק כי h היא פונקצייה חח"ע. כמו כן הסק כי

$$\chi(G) \cdot \chi(\bar{G}) \geq n$$

67) עבור $A = \{1, 2, 3\}$ נגדיר $G = (V, E)$ כאשר $V = A \times A$ (9 צמתים) ואת E קבוצת הצמתים נגדיר באופן הבא:

$$\{(a, b), (c, d)\} \in E \text{ אם ורק אם } a + b \neq c + d$$

א. הוכח כי G קשיר.

ב. מה דרגת הצומת $(1, 1)$ ומה דרגת הצומת $(2, 3)$? כמה קשתות יש ב- G ?

ג. הוכח כי באין ב- G מסלול אוילר.